

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# ریاضی و آمار (۱)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

کتاب معلم  
(راهنمای تدریس)

پایه دهم  
دوره دوم متوسطه

۱۳۹۵



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:

کتاب معلم ریاضی و آمار (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۳۶۳

پدیدآورنده:

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، آزاده حسین فرزانه، میرشهرام صدر، حسین میرزایی، عادل محمدپور، صدیقه ابراهیمی، مریم بیدهندی، زهرا جولایی و انیسه شاهدانی

(اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری:

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی:

لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - سمیه قنبری (صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - سیده‌فاطمه محسنی، علی نجمی، حسین قاسم‌پور اقدم، فاطمه پزشکی، ناهید خیام‌باشی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)

نشانی سازمان:

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبگاه: [www.irtxtbook.ir](http://www.irtxtbook.ir) و [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)

ناشر:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

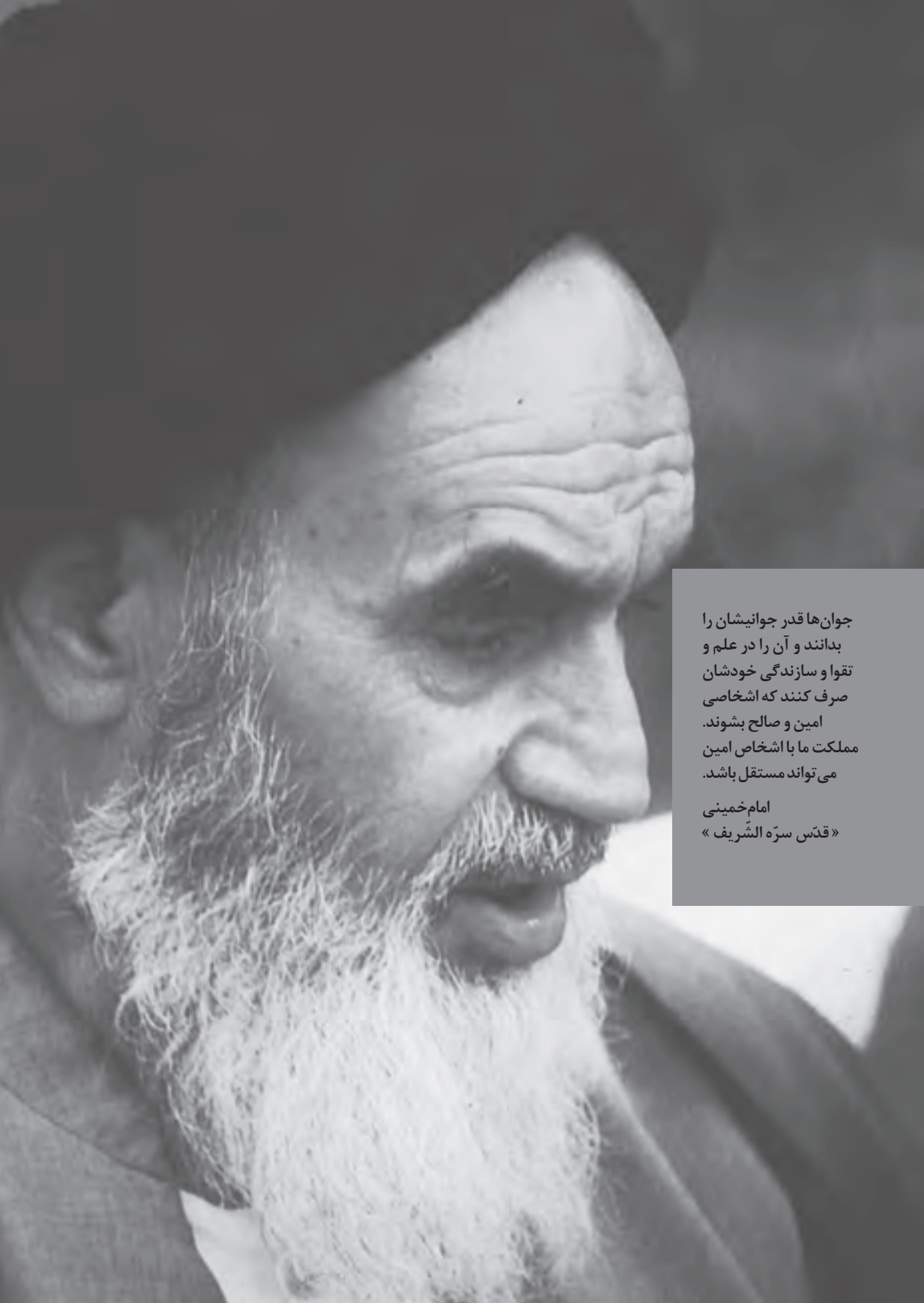
سال انتشار و نوبت چاپ:

چاپ اول ۱۳۹۵

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت جایی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکرار به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز، ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۶۷۴-۳

ISBN: 978-964-05-2674-3



جوان‌ها قدر جوانیشان را  
بدانند و آن را در علم و  
تقوا و سازندگی خودشان  
صرف کنند که اشخاصی  
امین و صالح بشوند.  
مملکت ما با اشخاص امین  
می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی  
«قدس سرّه الشّریف»

# فهرست

## فصل ۱: عبارت‌های جبری ..... ۱

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها ..... ۳

درس دوم: عبارت‌های گویا ..... ۹

## فصل ۲: معادله درجه دوم ..... ۱۷

درس اول: معادله مسائل توصیفی ..... ۲۴

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها ..... ۲۶

درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا ..... ۲۹

## فصل ۳: تابع ..... ۴۵

درس اول: مفهوم تابع ..... ۵۱

درس دوم: ضابطه جبری تابع ..... ۵۶

درس سوم: نمودار تابع خطی ..... ۶۳

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲ ..... ۶۸

## فصل ۴: کار با داده‌های آماری ..... ۷۵

درس اول: گردآوری داده‌ها ..... ۸۲

درس دوم: معیارهای گرایش مرکزی ..... ۸۶

درس سوم: معیارهای پراکندگی ..... ۸۸

## فصل ۵: نمایش داده‌ها ..... ۹۹

درس اول: نمودارهای یک متغیره ..... ۱۰۳

درس دوم: نمودارهای چند متغیره ..... ۱۰۵

## سخنی با معلم<sup>۳</sup>

کتاب ریاضی و آمار پایه دهم رشته انسانی در جهت اهداف برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش ریاضی برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان‌پذیر نیست ولی مدّ نظر قرار دادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهده معلم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفه خویش در مورد آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی مناسب و به‌هنگام درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را به‌موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب حاضر از سه بخش اصلی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل شده و توضیحات به صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعالیت» به‌طور عمده مدّ نظر بوده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درس و سهم بودن آنان در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه حل، مرتب کردن، قضاوت در مورد یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صدا البته، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند؛ بنابراین معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزان خود، یک فعالیت را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن را ساده‌تر نماید و حتی فعالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در کتاب ریاضی و آمار (۱) بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که

رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشته علوم انسانی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضی و آمار به پرورش تفکر ریاضی در آنها کمک کرده‌طوری که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برده و در آینده افرادی خلاق، متفکر و با قدرت تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعالیت، هدایت گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی، که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرصت دادن به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل‌مشغولی‌های همکاران عزیزمان باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طراحی شده و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانش‌آموزان به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمدتاً در داخل کادرهایی قرار دارند از طرف دبیران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حل «تمرین»‌ها به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ضرورت دارد که معلم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد.

گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی<sup>۱</sup> دارد. به علاوه، بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه داده شده قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان

# فصل ۱

## عبارت‌های جبری

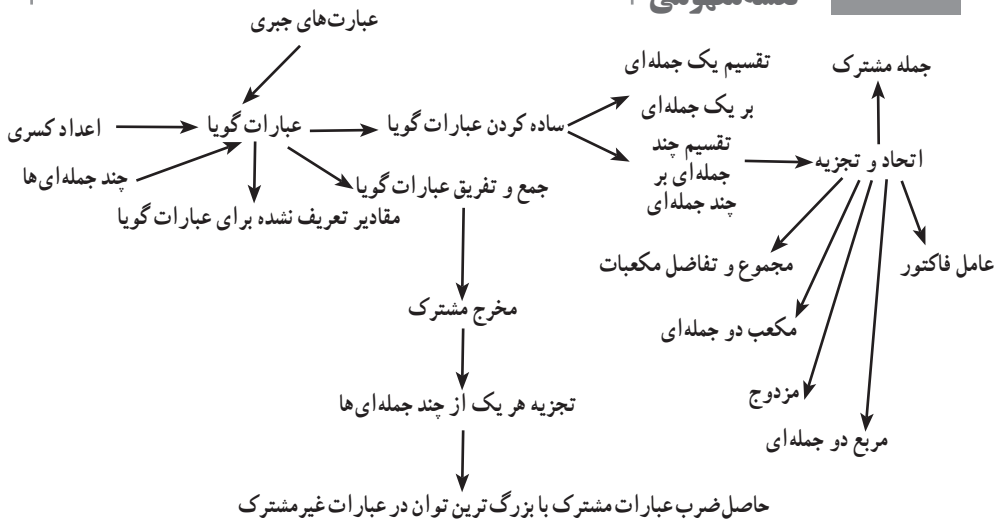
## نگاه کلی به فصل

در پایه نهم، فصل پنجم، دانش‌آموزان با عبارات‌های جبری و همچنین با اتحادهایی نظیر، اتحاد مربع مجموع دو جمله، مربع تفاضل دو جمله، مزدوج و جمله مشترک و تجزیه آنها و همچنین در فصل هفتم پایه نهم با عبارات گویا، ساده کردن و اعمال جبری روی عبارات گویا آشنا شده‌اند. در این فصل که شامل دو درس می‌باشد، در درس اول، دانش‌آموزان پس از مرور مطالب مربوط به اتحادهای سال گذشته با استفاده از خاصیت ضرب عبارات جبری و انجام کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها به اتحادهای جدیدی نظیر اتحاد مکعب دو جمله‌ای و اتحاد تفاضل و مجموع مکعب دو جمله‌ای و تجزیه آنها دست می‌یابند. نکته حائز اهمیت در فعالیت‌های این درس، این است که رسیدن به اتحادهای جبری با توجه به مثلث خیام صورت گرفته است و در این راستا باید توجیه کامل دانش‌آموزان در خصوص مثلث خیام، انجام گیرد و پس از رسیدن به اتحاد موردنظر، دانش‌آموزان باید بتوانند آن اتحاد را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنند.

**درس دوم:** یادآوری و تکمیل مطالب مربوط به ساده کردن و جمع و تفریق عبارات گویا می‌باشد.

از آنجایی که در درس اول مطالب مربوط به اتحادهای سال نهم کامل گردید، در این درس نیز ساده کردن عبارات گویا و اعمال جبری روی عبارات گویا با کمک این اتحادهای جدید مطرح می‌گردد و مطالب مربوط به عبارات گویا به صورت کامل بیان می‌شود. همچنین در جمع و تفریق عبارات گویا، مبحث مخرج مشترک‌گیری نیز عنوان می‌گردد.

## نقشه مفهومی





## چند اتحاد جبری و کاربردها

## درس اول

## اهداف درس اول

- در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :
- ۱- یادآوری مطالب ارائه شده در مورد عبارتهای جبری که در سال‌های قبل با آن آشنا شدند (به‌خصوص اتحادهای مربع دو جمله‌ای، مزدوج و اتحاد جمله مشترک و تجزیه عبارتهای جبری).
  - ۲- آشنا شدن با چند اتحاد جدید از جمله اتحاد مکعب دو جمله‌ای، تفاضل مکعب دو جمله‌ای و اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای
  - ۳- آشنا شدن با مثلث خیام و نحوه استفاده از آن جهت محاسبه  $(a+b)^n$  برای  $n$ های مختلف طبیعی (بسط دو جمله‌ای)
  - ۴- کاربردهایی از مثلث خیام
  - ۵- الگویابی

## روش تدریس درس اول

- هدف از این درس یادگیری اتحادهای مکعب دو جمله‌ای و مجموع و تفاضل مکعبات می‌باشد که در راستای تحقق این هدف، ابتدا با یادآوری اتحادهای سال گذشته، کار در کلاس‌هایی طراحی شده است و سپس دانش‌آموزان با انجام فعالیت‌هایی به اتحادهای جدید دست می‌یابند.
- هدف از کار در کلاس صفحات ۱۰ و ۱۱ مروری بر اتحادهای یاد گرفته شده در پایه نهم و تجزیه به کمک آنها می‌باشد.
- در کار در کلاس آخر صفحه ۱۱ می‌خواهیم دانش‌آموزان کاربرد اتحادها را در بعضی از محاسبات عددی بیاموزند.
- در کار در کلاس صفحه ۱۲ می‌خواهیم حاصل مکعب دو جمله‌ای را با استفاده از حاصل ضرب دو چند جمله‌ای که یکی از آنها اتحاد مربع دو جمله‌ای است که سال قبل آموخته و دیگری چند جمله‌ای ساده

است، را به دست آوریم.

هدف از فعالیت صفحه ۱۲ شناساندن مثلث خیام به دانش آموزان و توضیح دادن ارتباط بین سطوح آن و در نهایت به دست آوردن اتحاد مکعب دو جمله‌ای است و بیان آن با عبارت کلامی می‌باشد.  
کار در کلاس صفحه ۱۳ تمرین اتحاد مکعب دو جمله‌ای است.

هدف از کار در کلاس ابتدای صفحه ۱۴، چگونگی الگویابی از مثلث خیام است که دانش آموز، با توجه به توان‌های مختلف عدد ۲ و ارتباط آن با سطرهای مثلث خیام، یک حدس بیان می‌کند و براساس آن مقادیر مختلف توان‌های عدد ۲ را به دست می‌آورد. البته باید به دانش آموزان تأکید نمود که هر حدس ریاضی، باید ابتدا اثبات گردد در غیر این صورت ممکن است درست نباشد. در همین راستا، کار در کلاس بعدی در صفحه ۱۴ آورده شده است که دانش آموز با توجه به توان‌های محاسبه شده برای عدد ۱۱ تا توان چهارم و ارتباط آن با مثلث خیام، حدس می‌زند که باید ۱۱<sup>۵</sup> نیز بر حسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به صورت زیر نوشته شود :

$$11^5 = 15101051$$

در صورتی که اگر ۱۱<sup>۵</sup> را با همان روش توان‌های کوچک‌تر، به صورت مستقیم به دست آورد، به صورت زیر خواهد بود.

$$11^5 = (1+10)^5 = 1 + 5 \times 10 + 10 \times 10^2 + 10 \times 10^3 + 5 \times 10^4 + 1 \times 10^5 = 161051$$

یعنی حدس دانش آموز غلط است. حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا الگویی برای یافتن توان‌های مختلف ۱۱، با استفاده از مثلث خیام وجود دارد؟ جواب مثبت است.

برای این منظور، از ۱۱<sup>۵</sup> شروع می‌کنیم. برای پیدا کردن مقدار ۱۱<sup>۵</sup>، اولین عدد سمت چپ سطر ششم مثلث خیام را در نظر گرفته و آن را با رقم دهگان عدد بعدی و سپس با رقم صدگان عدد بعد از آن و به همین صورت ادامه می‌دهیم و حاصل آن را به عنوان اولین رقم از سمت چپ حاصل عبارت ۱۱<sup>۵</sup> قرار می‌دهیم.

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

سطر ششم

چون رقم دهگان عدد ۵، صفر است و اعداد بعد از ۵ نیز رقم صدگان ندارند، لذا طبق فرمول بالا، اولین رقم ۱۱<sup>۵</sup> برابر است با

$$1 + 0 = 1 \quad \text{رقم اول}$$

دومین رقم از سمت چپ ۱۱<sup>۵</sup>، بقیه به حالت قبل از دومین عدد سطر ششم مثلث خیام شروع می‌شود و با رقم دهگان عدد بعد از آن جمع می‌شود و سپس با رقم صدگان عدد بعد ۷ و ... لذا داریم :

$$5 + 1 = 6 \quad \text{رقم دوم}$$

رقم‌های بعدی ۱۱<sup>۵</sup> نیز به طور مشابه محاسبه می‌شوند :

$$\text{رقم سوم } 1 = 1 + 0$$

$$\text{رقم چهارم } 0 = 0 + 0$$

$$\text{رقم ششم } 5 = 0 + 5$$

$$\text{رقم هفتم } 1 =$$

بنابراین

$$11^5 = 1 \ 6 \ 1 \ 5 \ 1$$

برای توان‌های کمتر از ۵، یعنی  $11^1$ ،  $11^2$ ،  $11^3$  و  $11^4$  نیز الگوی بالا را اعمال کنید و چون هیچ کدام از اعداد واقع در سطرهاى دوم تا پنجم مثلث خیام، عدد دو رقمی نیستند لذا رقم دهگان و صدگان و ... همگی صفر هستند و دقیقاً ارقام توان‌های ۱۱، همان اعداد واقع در سطرهاى دوم تا پنجم مثلث خیام هستند.

حال این الگو را برای  $11^6$  انجام می‌دهیم:

$$1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \text{ سطر هفتم مثلث خیام}$$

$$1 = 0 + 1 = \text{رقم اول از سمت چپ } 11^6$$

$$7 = 1 + 6 = \text{رقم دوم از سمت چپ } 11^6$$

$$7 = 2 + 5 = \text{رقم سوم } 11^6$$

$$1 = 1 + 0 = \text{رقم چهارم } 11^6$$

$$5 = 0 + 5 = \text{رقم پنجم } 11^6$$

$$6 = 0 + 6 = \text{رقم ششم } 11^6$$

$$1 = 0 + 1 = \text{رقم هفتم } 11^6$$

لذا خواهیم داشت:

$$11^6 = 1 \ 7 \ 7 \ 1 \ 5 \ 6 \ 1$$

حال سؤالی که در ذهن بسیاری از شما معلمین ایجاد خواهد شد این است که در مراحل بالاتر توان‌های عدد ۱۱، احتمالاً جمع رقم یکان + رقم دهگان + رقم صدگان + ...، خود نیز یک عدد دو رقمی و یا چندرقمی خواهد شد، در این صورت باید چه کار کرد؟ جواب بسیار راحت است. باید در چنین حالتی، حاصل به‌دست آمده که یک عدد دو رقمی یا بیشتر است را در همان موقعیت به‌دست آمده قرار داد و سپس، همین الگو را مجدداً روی رقم‌های حاصل، اعمال کرد. به مثال زیر توجه کنید.

قصد داریم  $11^8$  را به‌دست آوریم. لذا باید سطر نهم مثلث خیام را در نظر بگیریم:

$$1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1 \text{ سطر نهم مثلث خیام}$$

$$۱۱^{\wedge} = ۱ + ۰ = ۱$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸ + ۲ = ۱۰$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸ + ۵ = ۱۳$$

این همه عدد، دو رقمی هستند

$$۱۱^{\wedge} = ۶ + ۷ = ۱۳$$

$$۱۱^{\wedge} = ۰ + ۵ = ۵$$

$$۱۱^{\wedge} = ۶ + ۲ = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸ + ۰ = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸ + ۰ = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۱$$

لذا اعداد زیر را که حاصل شده‌اند، پشت سر هم قرار می‌دهیم :

$$۱ \quad ۱۰ \quad ۱۳ \quad ۱۳ \quad ۵ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۱$$

حال مجدداً همان الگو را روی اعداد بالا اعمال می‌کنیم :

$$۱۱^{\wedge} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۱۱^{\wedge} = ۰ + ۱ = ۱$$

$$۱۱^{\wedge} = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱۱^{\wedge} = ۳ + ۰ = ۳$$

$$۱۱^{\wedge} = ۵$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۸$$

$$۱۱^{\wedge} = ۱$$

لذا عبارت  $۱۱^{\wedge}$  به صورت زیر خواهد بود :

$$۱۱^{\wedge} = ۲ \quad ۱ \quad ۴ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۱$$

در فعالیت صفحه ۱۵ می‌خواهیم مهارت تجزیه عبارات را به کمک اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات به دست آوریم.

هدف از تمرین ۶ صفحه ۱۶ به دست آوردن اتحاد مربع دو جمله‌ای با استفاده از مجموع مساحت‌های مستطیل‌های واقع در مربعی به ضلع  $a$  می‌باشد.

## توصیه‌های آموزشی

- ۱ در تجزیه عبارات جبری اگر فقط کلمه تجزیه به کار برده شد، عبارات را تا جایی که به عدد صحیح برسیم، تجزیه می‌کنیم. اما اگر عبارت «به ساده‌ترین صورت تجزیه کنید» به کار برده شود، می‌توان تجزیه را تا آخرین مرحله و داشتن ضرایب گویا نیز ادامه داد.
- ۲ بیان عبارت کلامی متناظر با اتحادها ضروری است. بنابراین بعد از طی مراحل رسیدن به اتحادها، از دانش‌آموزان بخواهید که عبارت اتحاد را به صورت عبارت کلامی و کامل بیان کنند.
- ۳ با حل کامل کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های مرتبط با مثلث خیم، سعی کنید دانش‌آموزان را با این شیوه به طور کامل آشنا سازید و کاربرد آن را در اتحادها پراشان روشن نمایید.
- ۴ به دست آوردن اتحادهایی که جملات گویا دارند، برای دانش‌آموزان کمی دشوار است. توجه نمایید که با حل تمرین ۱ صفحه ۱۵ و تکرار مثال‌هایی مشابه این تمرین، می‌توان این مشکل را برطرف ساخت.
- ۵ در تجزیه عبارات جبری مرکب، می‌توان به دانش‌آموز توصیه کرد که ابتدا از عامل مشترک، فاکتورگیری انجام گیرد پس از اتحادها، تا در تمرین‌هایی شبیه تمرین (۵-الف) دچار مشکل نشود. همچنین باید یادآوری کرد که عامل فاکتور می‌تواند خود یک عبارت، حتی عبارت توان‌دار باشد.
- ۶ دانش‌آموزان در مبحث توان‌رسانی دچار مشکل می‌شوند. سعی شود قبل از ورود اعداد توان‌دار در اتحادها و به دست آوردن حاصل آنها، در مورد توان‌رسانی یادآوری صورت گیرد.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

بعضی اوقات دانش‌آموزان در اتحاد مکعب تفاضل دو جمله، هم منفی بین دو جمله را برای جمله دوم در نظر می‌گیرند و هم طرف دوم اتحادها را. لازم است یادآوری شود که در این مواقع فقط ما جملات را بدون در نظر گرفتن علامتشان، در طرف دوم اتحاد قرار می‌دهیم.

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 - (-1)^3$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \rightarrow \text{اشتباه است.}$$

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 - (1)^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \rightarrow \text{صحیح است.}$$

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ با استفاده از اتحادها، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(2x+3y)^2$	ب) $(-1+y^2)^2$	پ) $(2x+\frac{1}{y})^2$
ت) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$	ث) $(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})$	ج) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{y})^3$
چ) $(2x-4)(2x+3)$	ح) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$	

۲ عبارات زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید.

الف) $x^2+1 \cdot x+25$	ب) $4a^2+4ax+x^2$
پ) $4x^2-y^2$	ت) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}$
ث) $4x^2-1 \cdot x-6$	ج) $a^2+8b^2$
چ) $x^2+3x^2+3x+1$	ح) $27x^2-\frac{1}{8}$
خ) $a^2-6a^2+12a-8$	د) $x^2+2\sqrt{2}x+2$
ذ) $2-a^2$	

۳ حاصل عبارت را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(x+y)^2-(x-y)^2$$

۴ با استفاده از اتحادها حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(11)^2$	ب) $10^2 \times 98$	پ) $(99)^2$	ت) $(999)^2$
---------------	---------------------	-------------	--------------

۵ عبارتهای زیر را به ساده‌ترین عبارت تجزیه کنید.

الف)  $18a^4(a^2+4)^4+64a^6(a^2+4)^3$

ب)  $x^{12}-27x^3$

## عبارات‌های گویا

### درس دوم

### اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ شناسایی عبارات‌های گویا و تشخیص آنها از عبارات غیرگویا
- ۲ توانایی ساده کردن عبارات گویا
- ۳ توانایی جمع و تفریق عبارات گویا و مخرج مشترک‌گیری بین آنها
- ۴ به دست آوردن مقادیری از متغیرها که به ازای آنها، مقدار عددی عبارات گویا تعریف نمی‌شود.

### روش تدریس درس دوم

هدف از این درس کامل کردن مطالب مربوط به عبارات گویای سال گذشته، اعم از ساده کردن و جمع و تفریق عبارات گویا، می‌باشد. برای همین منظور، ابتدا با یادآوری تشخیص عبارات گویا از عبارات غیرگویا، فعالیت و کار در کلاسی طراحی شده است و سپس با انجام کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های بعدی هدف اصلی درس تحقق می‌یابد.

هدف از فعالیت صفحه ۱۸ این است که دانش‌آموز بتواند عبارات گویا را از عبارات غیرگویا تشخیص دهد. و در این راستا به مطالب سال گذشته راجع به عبارات گویا نیز، باید مسلط باشد.

هدف از اولین کار در کلاس صفحه ۱۹ تشخیص عبارات گویا و همچنین تعیین مقداری است که به ازای آن مخرج کسر صفر شود. (مروری بر مطالب سال گذشته)

قسمت ۱ دومین کار در کلاس صفحه ۱۹، ساده کردن عبارات گویایی که در تجزیه آنها از اتحادها استفاده می‌شود را یادآوری می‌کند.

قسمت ۲ آن کار در کلاس، اشاره به یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است که در ساده کردن عبارات گویا به عمل ضرب بین عامل‌های مشترک دقت نمی‌کنند و عبارت داده شده را به صورت غلط ساده می‌کنند.

$$\frac{2x^2 + \cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = 2x^2 + 1 \rightarrow \text{اشتباه است،}$$

زیرا باید صورت و یا مخرج به صورت حاصل ضرب باشند تا ساده شوند.

قسمت ۳، نکته صفحه ۱۹ (ساده کردن عبارات گویا) را با مثال مفهومی متذکر می‌شود و آن این است که عاملی که از صورت و مخرج خط می‌زنیم باید مخالف صفر باشد.

هدف از فعالیت صفحه ۲۱، درک مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک بین چند جمله‌ای‌ها و در نهایت رسیدن به این نکته که مخرج مشترک‌گیری یعنی به دست آوردن حاصل ضرب عبارات مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارات غیر مشترک بعد از تجزیه هر یک از چند جمله‌ای‌هاست.

قسمت ۱ کار در کلاس صفحه ۲۲ یادآوری کوچک‌ترین مضرب مشترک بین دو عبارت می‌باشد که در سال‌های گذشته به صورت ساده‌تر خوانده‌اند.

قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۲۲ نشان می‌دهد که مخرج مشترک همان کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چند جمله‌ای می‌باشد.

فعالیت صفحه ۲۳، با توجه به فراگیری دانش‌آموزان در مورد مخرج مشترک، در اینجا به طور کلی جمع و تفریق عبارات گویا را می‌آورد و از کوچک‌ترین مضرب مشترک برای مخرج مشترک‌گیری به این ترتیب که ابتدا با یکی کردن مخرج‌ها و سپس اینکه مخرج اولی چه چیزی نسبت به مخرج مشترک کم دارد که صورتش باید در آن ضرب شود، تک‌تک این عبارات را به این صورت به دست آورده و در آخر بر طبق صورت مسئله با هم جمع یا از هم کم می‌کنند.

کار در کلاس صفحه ۲۳ تمرینی بریادگیری فعالیت صفحه ۲۳ می‌باشد.

### توصیه‌های آموزشی

- ۱ در ساده کردن عبارات گویای مرکب، از دانش‌آموزان بخواهید که تجزیه عبارات‌های جبری را به خاطر بیاورند و سپس به آنها توصیه کنید که از روشی استفاده کنند که برای آنها راحت‌تر و قابل فهم‌تر است.
- ۲ در حالت کلی، اکثر دانش‌آموزان با مخرج مشترک‌گیری ساده نیز مشکل دارند، بنابراین توصیه می‌شود ضمن یادآوری مخرج مشترک‌گیری ساده، در مبحث جمع و تفریق عبارات گویا، مخرج مشترک‌گیری عبارات گویا را مفصل برای دانش‌آموزان تفهیم فرمایید.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، در ساده کردن عبارات‌هایی است که در صورت و مخرج عامل



مشترکی وجود دارد، ولی به صورت ضرب نیست مانند :

$$\frac{x^2 + 6}{x^2} = 6 \text{ اشتباه است.}$$

برای پرهیز از این گونه اشتباهات، باید به دانش‌آموزان تذکر داده شود که فقط در صورتی می‌توان عامل مشترک صورت و مخرج را با هم ساده کرد که هم صورت و هم مخرج کسر به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت نوشته شده باشد. در صورتی که در عبارت بالا  $x^2 + 6$  را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب  $x^2$  در یک عبارت دیگر نوشت.

۲ اشتباهات دیگر دانش‌آموزان اینکه، در تفریق عبارات گویا، علامت منفی پشت عبارت را فقط در اولین جمله تأثیر داده و در بقیه جملات لحاظ نمی‌کنند. در این صورت حتماً باید به دانش‌آموزان متذکر شوید که علامت منفی باید در تمام جملات بعد از آن ضرب شود.

$$\frac{y-3}{2y-5} - \frac{3y-4}{2y-5} = \frac{y-3-3y-4}{2y-5} = \frac{-2y-7}{2y-5} \rightarrow \text{اشتباه است}$$

$$\frac{y-3}{2y-5} - \frac{3y-4}{2y-5} = \frac{y-3-3y+4}{2y-5} = \frac{-2y+1}{2y-5} \rightarrow \text{صحیح است}$$

۳ یکی دیگر از اشتباهاتی که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند این است که برای تعیین مقادیر تعریف نشده یک عبارت گویا، ابتدا صورت و مخرج را ساده می‌کنند. سپس با مساوی صفر کردن مخرج، مقدار تعریف نشده را به دست می‌آورند و این کار اشتباه است. برای به دست آوردن مقادیر تعریف نشده یک عبارت گویا اصلاً نباید عبارت گویا را ساده کرد. بلکه فقط باید مخرج را تجزیه کرده و مساوی صفر قرار داد و مقدار تعریف نشده را به دست آورد.

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3}$

ب)  $\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} - \frac{1}{x}$

پ)  $\frac{x^3 + 8}{x^3 - 8} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2 + 2x + 4}$

$$\text{ت) } \frac{x^2 + xy}{x^2 - xy} - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

۲ عبارات گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$\text{الف) } \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$$

$$\text{پ) } \frac{x^4 - 16a^4}{2x^3 - 8xa^2}$$

$$\text{ب) } \frac{a^2c^3 - ab^2c}{a^2b^2c^3 - a^3bc}$$

$$\text{ت) } \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x(x-1)(x+2)}$$

۳ عبارت گویایی را بیابید که اگر با  $\frac{x+1}{x-1}$  جمع شود حاصل ۳ شود.

## حل تمرین فصل ۱

تمرین صفحه ۱۵

$$۱ \quad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$$

$$\left(2 - \frac{a}{3}\right)^2 = 4 - \frac{4a}{3} + \frac{a^2}{9}$$

$$\left(2z - \frac{1}{4}\right)^2 = 4z^2 - 2\left(2z\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(2z\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

$$= (2z)^2 - 2z + \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{b}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{2b}{12} + \frac{2b^2}{36} + \frac{b^2}{9} = \frac{1}{16} + \frac{b}{6} + \frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{9}$$

$$۲ \quad (a + \sqrt{2})^2 = a^2 + 2\sqrt{2}a + 2$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$(\sqrt{3} + x)^2 = 3\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3}x^2 + x^2$$

$$\text{۳} \quad x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$1 + z^2 = (1 + z)(1 - z + z^2)$$

$$8 - t^6 = 2^3 - (t^2)^3 = (2 - t^2)(4 + 2t^2 + t^4)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$

$$25x^2 + 25x + 6 = (5x + 2)(5x + 3)$$

$$4x^2 + 14x + 12 = (2x + 3)(2x + 4) = 2(2x + 3)(x + 2)$$

$$\text{۴} \quad (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$$

$$(7x - 2)(49x^2 + 14x + 4) = (7x)^3 - 8 = 343x^3 - 8$$

$$\text{۵} \quad \text{الف} \quad 12x^6(x^2 + 5)^2 - 1 \cdot x^6(x^2 + 5)^2$$

$$\begin{aligned} 2x^6(x^2 + 5)^2(6x^2 - 5(x^2 + 5)) &= 2x^6(x^2 + 5)^2(x^2 - 25) \\ &= 2x^6(x^2 + 5)^2(x - 5)(x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{ب} \quad x^8 - 625x^2 = x^2(x^6 - 5^4) = x^2(x^2 - 5^2)(x^2 + 5^2)$$

$$= x^2(x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)$$

$$\text{۶} \quad \text{الف} \quad S_1 = (a - b)^2$$

$$S_2 = b(a - b)$$

$$S_3 = b(a - b)$$

$$S_4 = b^2$$

	a - b	b	
a - b	$S_1$	$S_2$	
b	$S_3$	$S_4$	b

$$\text{ب} \quad S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a - b)^2 + b(a - b) + b(a - b) + b^2$$

$$= (a - b)^2 + 2b(a - b) + b^2 *$$

$$\text{ب} \quad S = ((\underbrace{a - b}_{(x + y)^2}) + \underbrace{b}_{y^2})^2 \stackrel{\text{طبق}}{=} (\underbrace{a - b}_{x^2})^2 + \underbrace{2b(a - b)}_{xy^2} + \underbrace{b^2}_{y^2}$$

$$\text{۷} \quad (1 \circ \circ 1)^2 = (1 \circ \circ \circ + 1)^2 = (1 \circ \circ \circ)^2 + 3(1 \circ \circ \circ)(1) + 3(1 \circ \circ \circ)(1) + 1^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ + 3 \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ + 3 \circ \circ \circ \circ + 1 = 1 \circ \circ \circ 3 \circ \circ 3 \circ \circ 1 \\
 (99)^r &= (1 \circ \circ - 1)^r = (1 \circ \circ)^r - 3(1 \circ \circ)^r(1) + 3(1 \circ \circ)(1)^r - 1 = 1 \circ \circ \circ \circ \circ \circ - 3 \circ \circ \circ \circ \circ + 3 \circ \circ \circ - 1 \\
 &= 97 \circ 299
 \end{aligned}$$

### تمرین صفحه ۲۴

$$1 \quad \frac{x^r + 1}{x^r - 1}$$

$$x^r - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$2 \quad \frac{2x^r + 1}{x^r + 4}$$

$$x^r + 4 = 0 \rightarrow x^r = -4 \text{ غ ق } \circ$$

$$3 \quad \frac{5}{x^r + x}$$

$$x^r + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$4 \quad \frac{x^r + 3x^r + 2x}{x(x+1)(x^r - 4)}$$

$$x(x+1)(x^r - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$5 \quad \frac{3x^r y + 6xy^r}{x^r}$$

$$x^r = 0 \rightarrow x = 0$$

$$6 \quad \frac{42a^r - 3 \circ a^r m}{am^r - 25a}$$

$$am^r - 25a = 0 \rightarrow a(m^r - 25) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ m = \pm 5 \end{cases}$$

$$7 \quad \frac{b^r x^r - ab^r x^r}{a^r b^r x^r - a^r b^r x}$$

$$a^r b^r x^r - a^r b^r x = 0 \rightarrow a^r b^r x(x-a) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$8 \quad \frac{x^6 - a^6}{ax^r - a^r x}$$

$$ax^r - a^r x = 0 \rightarrow ax(x^r - a^r) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$$

$$9 \quad \frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^r} + 1 = \frac{4y^r - 15x^r + 18xy^r}{18xy^r}$$

$$10 \quad \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$11 \quad \frac{\frac{1}{m} + 1}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{m+1} = \frac{\cancel{1+m}}{m(\cancel{1+m})} = \frac{1}{m}$$

$$\begin{aligned} ۱۲ \quad \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} &= \frac{2x + (x - y) - (x + y)}{x^2 - y^2} = \frac{2x - 2y}{x^2 - y^2} = \frac{\cancel{2(x - y)}}{\cancel{(x - y)}(x + y)} \\ &= \frac{2}{x + y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۳ \quad \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x + 2}{x^2 - 9} - \frac{5}{3 - x} \\ x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \\ x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \xrightarrow{\text{ک م م}} -(x - 3)^2(x + 3) \\ 3 - x = -(x - 3) \\ &= \frac{-(x + 3)(x + 3) + (x + 2)(x - 3) - 5(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)^2(x + 3)} \\ &= \frac{-\cancel{x^2} - 6x - 9 + \cancel{x^2} - x - 6 - 5x^2 + 45}{-(x - 3)^2(x + 3)} = \frac{-5x^2 - 7x + 30}{-(x - 3)^2(x + 3)} = \frac{5x^2 + 7x - 30}{(x - 3)^2(x + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۴ \quad \frac{y - 3}{y^2 - 4} - \frac{y + 2}{y^2 - 4y + 4} - \frac{2}{2 - y} \\ y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2) \\ y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 \xrightarrow{\text{ک م م}} -(y - 2)^2(y + 2) \\ 2 - y = -(y - 2) \\ &= \frac{-(y - 3)(y - 2) + (y + 2)^2 - 2(y^2 - 4)}{-(y - 2)^2(y + 2)} = \frac{-\cancel{y^2} + 5y - 6 + \cancel{y^2} + 4y + 4 - 2y^2 + 8}{-(y - 2)^2(y + 2)} \\ &= \frac{-2y^2 + 9y + 6}{-(y - 2)^2(y + 2)} = \frac{2y^2 - 9y - 6}{(y - 2)^2(y + 2)} \end{aligned}$$



## فصل ۲

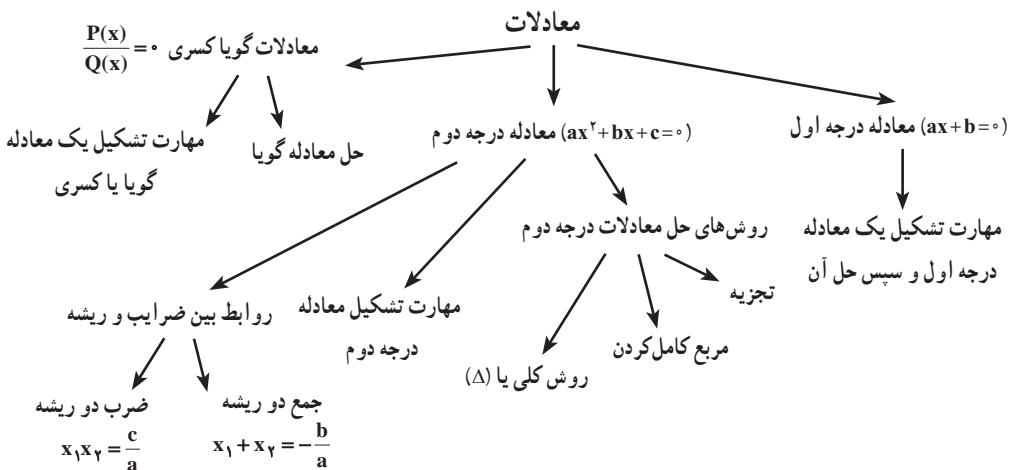
### معادله درجه دوم

## نگاه کلی به فصل

مطالب این فصل با معادله درجه اول شروع شده که هدف آن مهارت دانش آموز در مدل سازی یک معادله توسط یک ترازو می باشد که بتوان در مورد تعداد جواب های یک مسئله بحث کرده، سپس با اطلاعات مسئله تشکیل یک معادله داده و مهارت تشکیل دادن یک معادله را تجربه کرده، سپس به حل آن بپردازد. بعد با بیان مثالی که از کتاب نهم اقتباس شده با داشتن قطر مربعی می خواهد محیط را به دست آورد. سرانجام معادله ای از درجه بالاتر را معرفی می کند که به این معادله درجه دوم می گویند.

در ادامه جواب های معادله را با حدس زدن و سپس روش ها و فنون حل معادله درجه دوم بیان می کند و همچنین با داشتن جواب های یک معادله می توان آن معادله را تشکیل داد که آن معادله منحصر به فرد نیست و سپس با بیان چند مسئله مهارت ساختن معادله درجه دوم را بیان می کند که در اینجا سعی شده از مثال هایی استفاده کنند که دانش آموزان رشته انسانی با آنها سر و کار دارند مثل مفاهیم تابع سود، درآمد، هزینه، نقطه سر به سر. و در انتها با نوع دیگر معادلات که آنها را معادلات کسری یا گویا می گویند آشنا می شوند تا بتوانند با استفاده از آن، مسائل کاربردی را از طریق معادلات گویا حل کنند. البته به طور مختصر فقط با مفهوم روابط بین ضرایب و ریشه ها آشنا می شوند.

## نقشه مفهومی





## دانستنی‌های معلم

ریشه‌یابی معادلات روش‌های یافتن ریشه‌های یک معادله (The roots of equation) یعنی نقاط تلاقی نمودار آن معادله با محورهای مختصات می‌باشد و چون در توابع  $y$  را برحسب  $x$  تعریف می‌کنیم ریشه‌های یک معادله را نقاط برخورد با محور  $x$  ها (طول‌ها) در نظر می‌گیریم. برای مثال ریشه‌های معادله  $y = ax + b$  و یا  $y = ax^2 + bx + c$  و یا به‌طور کلی  $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + c$  نسبت به محور  $x$  ها در واقع نقاط اشتراک نمودار معادله با محور  $x$  ها می‌باشد و چون آن نقاط روی محور  $x$  ها می‌باشد دارای عرض صفر می‌باشند. بدین منظور باید مقدار  $x$  را در معادله‌ای که عرض ( $y$ ) آن صفر است به‌دست آوریم.

در حل معادله درجه اول که به‌صورت  $y = mx + h$  می‌باشد و  $y$  عرض اصلی و  $h$  عرض اولیه یا عرض از مبدأ است باید  $y = 0$  قرار دهیم و داریم  $mx + h = 0 \leftarrow x = \frac{-h}{m}$  که  $x$  برابر است با حاصل تقسیم عرض از مبدأ به شیب یعنی هنگامی که عرض از مبدأ صفر باشد نمودار از مبدأ می‌گذرد و  $x = 0$  می‌باشد. در معادله درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  که  $y = 0$  قرار می‌دهیم و  $ax^2 + bx + c = 0$  را شروع به حل کردن می‌کنیم در صورت تجزیه عبارت درجه ۲ به پرانتزهای درجه ۱ حداکثر ۲ تا پرانتز ظاهر می‌شود که ممکن است این دو پرانتز شبیه به هم باشند پس می‌توان گفت که هر معادله درجه دوم حداکثر ۲ جواب دارد. اگر دو پرانتز مثل هم نباشند (۲ جواب) اگر پرانتزها مثل هم باشند (۱ جواب) و اگر نتوانیم تجزیه کنیم اصلاً جواب نداریم: سپس می‌توان گفت که معادله درجه  $n$ ، حداکثر  $n$  جواب دارد.

عبارت  $b^2 - 4ac$  را برابر با حرف دلتای  $\Delta$  نمایش می‌دهند دلتا در ریاضیات نماد فاصله یا تغییرات است.

طبق قضیه تثلیث دلتا

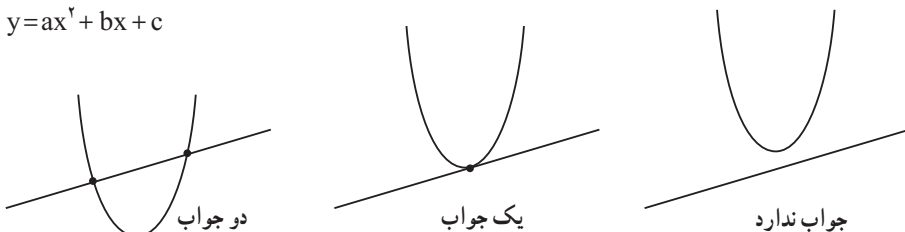
۱ اگر  $\Delta > 0$  در این صورت فاصله بین دو ریشه مثبت است. پس معادله دو ریشه مختلف است.

۲  $\Delta = 0$  در این صورت فاصله بین دو ریشه صفر است پس هر دو جواب یکی است و معادله اصطلاحاً ریشه مضاعف دارد.

۳  $\Delta < 0$  فاصله بین دو ریشه منفی است و همان‌طور که می‌دانیم فاصله عدد منفی نمی‌تواند باشد و از سوی دیگر  $\Delta$  در زیر رادیکالی با فرجه زوج نمی‌تواند باشد پس ریشه ندارد.

به کمک نقاط برخورد خط و سهمی می‌توان تعداد جواب‌های معادله را تشخیص داد.

$$y = ax^2 + bx + c$$



اگر  $\Delta$  مربع کامل باشد جواب‌های مسئله اعداد گویا می‌باشند.

## مسیرهایی برای توسعه

برخی از مسائل مطرح‌شده در ادامه، ویژه دانش‌آموزانی که توانایی فراتری دارند و برای آزمون‌های عمومی توصیه نمی‌شود.

۱ مجموع ثلث و خمس عددی ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن عدد است، نصف این عدد را بیابید.

۲ مجموع سه عدد فرد متوالی ۴۸۳ است رقم دهگان عدد بزرگ‌تر را بیابید.

۳ می‌دانیم قیمت پارچه ابریشمی ۶ برابر پارچه نخی است و با ۱۸۸۰۰۰ ریال می‌توانیم ۵۰ متر پارچه نخی و ۲۳ متر پارچه ابریشمی بخریم. قیمت یک متر از هر نوع پارچه را معین کنید.

۴ جواب معادله  $x = x - 2(x - 1) - 4$  از جواب معادله  $2(5 - 2x) = 2(0/2x + 0/005)$  چقدر بیشتر است؟

۵ امسال پدری در ۲۰ سالگی فرزندش ۴۶ سال دارد. چند سال قبل سن پدر سه برابر سن پسرش بوده است؟

۶ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\text{الف)} \quad (4x+1)^2(2x-1)^2 \quad \text{ت)} \quad x^3 - 10x^2 + 21x = 0$$

$$\text{ب)} \quad (x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) = 0 \quad \text{ث)} \quad x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{پ)} \quad x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \quad \text{ج)} \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

۷ معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف)} \quad \sqrt{3}x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} - 2 = 0 \quad \text{ث)} \quad (x^2 + 3x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 4$$

$$\text{ب)} \quad 2(x+2)^2 + 2x^2 = (2x-3)^2 + x \quad \text{ج)} \quad x^2 - 4x + \frac{6}{x^2 - 4x + 3} = 2$$

$$\text{پ)} \quad (x+1)^2 - x^2 = 1 \quad \text{ج)} \quad (x-1)^4 + x^2 = 19 + 2x$$

$$\text{ت)} \quad (3x+1)^2 - 5(3x+1) + 6(3x+1) = 0 \quad \text{ح)} \quad (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3$$

۸ نشان دهید معادله  $(a^2+1)x^2 = bx + ax + 2$  همواره جواب دارد.

۹ اگر  $A = 2x - 1$  باشد آنگاه جواب معادله  $A^2 + 2A - 1 = 0$  را به دست آورید.

۱۰ حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله  $2x(x^2+1) + 5 = 2x(x^2+3x)(x^2+1)$  را به دست آورید.

۱۱ مجموع ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3mx + 1 = 0$  از حاصل ضرب ریشه‌های آن یک واحد بیشتر است  $m$  را بیابید.

۱۲ مقدار  $m$  را طوری بیابید که معادله  $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$  دارای ریشه مضاعف

باشد. سپس ریشه مضاعف را حساب کنید.

۱۳ ابعاد زمین فوتبال  $90 \times 60$  است و عرض حاشیه پشت دروازه‌ها، ۲ برابر عرض حاشیه کنار زمین است. اگر بنا باشد مساحت زمین فوتبال و حاشیه آن برابر باشد، حاشیه اطراف زمین چقدر است؟

۱۴ مساحت زمین مستطیل شکلی ۱۸ مترمربع و محیط آن ۱۷ متر می‌باشد قدر مطلق اختلاف طول و عرض این زمین چقدر است؟

۱۵ اگر معادله  $ax^2 + bx^2 + c = 0$  دو جواب داشته باشد شرطی بیاید که

(الف) دو جواب قرینه یکدیگر داشته باشد. (ب) دو جواب معکوس یکدیگر داشته باشد.

۱۶ سه کارگر که کم تجربه می‌باشند لوله‌کشی یک ساختمان را طی ۸ روز به اتمام می‌رسانند ولی همین میزان کار را دو کارگر با تجربه در ۵ روز انجام می‌دهند. دو کارگر کم تجربه و یک کارگر با تجربه طی چند روز این کار را انجام می‌دهند؟

۱۷ دو شیر A و B هریک به تنهایی ۳ و ۵ ساعت یک استخر را پر از آب می‌کنند و دریچه تخلیه در ۶ ساعت استخر را تخلیه می‌کند اگر دو شیر A و B و دریچه تخلیه باز باشد آیا استخر پر از آب می‌شود؟ چرا؟

۱۸ قایق‌های تفریحی در رودخانه کارون در شهر اهواز مسافران را در یک گردش سه ساعت ۱۵ کیلومتر برخلاف جریان آب به بالای رودخانه می‌برند و سپس برمی‌گردانند. اگر سرعت آب از بالا به پایین  $2 \text{ km/h}$  باشد، سرعت ثابت قایق تفریحی (در آب ساکن) چقدر است؟ مدت زمانی که قایق در خلاف جهت آب رودخانه حرکت می‌کند چقدر است؟

۱۹ معادله را حل کنید. 
$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

۲۰ نمودار تابع  $y = 2x^2 - 5x - 3$  و  $y = x^2 - x - 3$  محور xها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ از تعداد CDهایی که نسترن داشت نیمی را به برادرش و نیمه بقیه‌اش را به پدرش و نیمه باقی مانده را به مادرش داد و پنج CD دارد. تعداد CDهای نسترن چقدر بوده است؟

۲ علی و رضا و نیما در مجموع ۸۰ درصد سهام یک شرکت تازه تأسیس را خریده‌اند که سهم رضا نصف سهم علی و سهم نیما ۳۳ درصد می‌باشد. سهم علی چقدر از سهم نیما بیشتر است؟

۳ مجموع ثلث و سه برابر عددی ۱۷۰ است آن عدد را بیابید.

۴ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

(الف)  $2x(x+2) = -2x(3x+2)$

(ث)  $x^2 + 7x - 18 = 0$

(ب)  $x(x-4) = 49 - 4x$

(ج)  $4x^2 - 14x + 12 = 0$

(پ)  $3x^2 = 27$

(چ)  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

(ت)  $(x+1)^2 = 9x^2$

۵ در معادله درجه دوم  $ax^2 - 2ax + a - 1 = 0$  مقدار  $a$  چه باشد تا بین معادله  $(\Delta)$  برابر ۱۶ باشد؟

۶ معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش ۲- و ۵ باشد و ضریب  $x$  آن  $-\frac{1}{3}$  باشد.

۷ معادله درجه دومی تشکیل دهید که دارای ریشه مضاعف  $-\frac{2}{5}$  باشد و ضریب  $x^2$  آن ۵ باشد.

۸ به کمک  $(\Delta)$  تعداد جواب های معادلات زیر را تعیین کنید.

(الف)  $-\frac{1}{4}x^2 + 3x + 4/5 = 0$  (ب)  $\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0$

۹ معادله  $(2x+1)^2 = 2k-1$  مفروض است.

(الف) به ازای چه مقداری از  $K$  این معادله دارای ریشه مضاعف است؟

(ب) به ازای چه مقداری از  $K$  این معادله دارای دو ریشه حقیقی است؟

(پ) به ازای چه تعدادی از  $K$  این معادله دارای ریشه حقیقی نیست؟

۱۰ معادلات زیر را حل کنید.

(الف)  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  (روش مربع کامل کردن)

(ب)  $x(2x+3) = 6$  (مربع کامل کردن)

(پ)  $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 3x^2$

(ت)  $3x^2 + 4x + 2 = 0$

(ث)  $x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$

(ج)  $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 - 57$

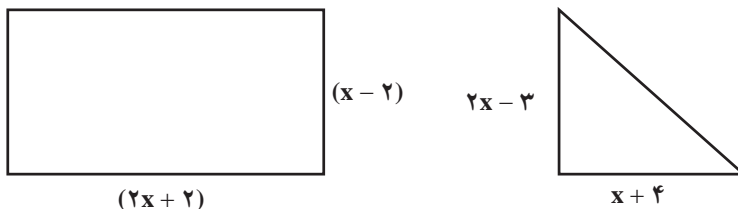
(چ)  $x(2x-1) = 1$

۱۱ چرا معادله  $4x^2 - ax - 9 = 0$  همواره جواب دارد؟

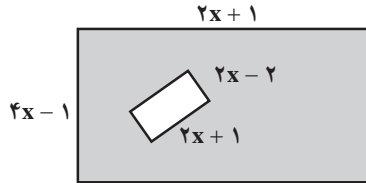
۱۲ مقدار  $m$  را طوری بیابید که  $x=2$  یک جواب معادله  $x^2 + mx + 2 = 0$  باشد، سپس جواب دیگر این

مسئله را بیابید.

۱۳ مساحت مستطیل و مثلث شکل زیر با هم مساویند. طول اضلاع مثلث قائم الزاویه را به دست آورید.



۱۴ در شکل زیر مقدار  $x$  را چنان تعیین کنید که مساحت قسمت هاشورخورده ۱۶ گردد.



۱۵ بدون حل معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را در معادله  $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{8} = 0$  به دست آورید.

۱۶ در معادله  $(2+m)x^2 + 3x + 5m = 0$  مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌ها  $-\frac{1}{4}$  باشد.

۱۷ مقدار  $m$  را چنان بیابید که معادله  $x^2 + 4x - m - 1 = 0$  دارای یک جواب باشد.

۱۸ مقدار  $m$  را چنان بیابید که معادله  $x^2 + 4x + 2m - 1 = 0$  دارای ریشه مضاعف باشد سپس آن جواب

را به دست آورید.

۱۹ معادله  $\frac{2x}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$  را حل کنید.

۲۰ تابلویی از جنس برنز داریم که نسبت برنز خالص به وزن برنج خالص آن ۷ است اگر آن را ذوب کرده

و ۲۰۰ گرم برنج به آن اضافه کنیم و تابلوی جدیدی ساخته شود می‌دانیم  $\frac{3}{4}$  وزن تابلوی جدید برنز است

حال این تابلو قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

۲۱ دو نقاش ساختمان با هم، کار یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اگر نقاش اول به تنهایی

تمام کار را ۱۵ روز زودتر از نقاش دوم تمام کند، هر کدام از این دو نقاش به تنهایی تمام کار را در چند روز

تمام می‌کنند؟

۲۲ عدد طبیعی را بیابید که مجموع عکس عدد قبل و بعد از آن برابر  $\frac{3}{4}$  باشد.

۲۳ به ازای چه مقدار  $a$  معادله  $\frac{3x-2}{a+4} + \frac{x}{(2x-4)^2+1} = 3$  دارای جواب  $x = -\frac{1}{4}$  است؟

۲۴ هزینه تولید  $x$  دستگاه کامپیوتر در شرکتی برابر با  $C(x) = -x^2 + 30x + 3500$  میلیون ریال می‌باشد.

اگر این شرکت هر کامپیوتر را ۱۰ میلیون ریال بفروشد. چند کامپیوتر بفروشد تا نه سود کند و نه زیان؟ (یا

نقطه سربه سر آن را به دست آورید.)

## معادله مسائل توصیفی

## اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ مهارت مدل کردن یک معادله به ترازو
- ۲ مهارت تشکیل یک معادله درجه اول و سپس حل آن
- ۳ معرفی معادله درجه دوم
- ۴ با داشتن ریشه‌های معادله درجه دوم قادر به ساختن معادله درجه دوم باشند.

## روش تدریس

در فعالیت اول می‌خواهد به کمک یک ترازو، معادله را به صورت دو کفه ترازو نشان دهد که در صورتی کفه‌ها در یک راستا قرار می‌گیرند که مقادیر یکسان داشته باشند. سپس در فعالیت بعدی با طرح یک مسئله از دانش‌آموزان می‌خواهد که آن را به یک معادله تبدیل کنند؛ و وقتی دنبال عددی می‌گردند و نمی‌دانند آن عدد را  $x$  در نظر بگیرند. و در کار در کلاس با مطرح کردن یک معمای قدیمی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که معادله ریاضی آن را ابتدا به دست آورند و بعد شروع به حل آن کنند. در این مثال از جنگل حرا واقع در جزیره قشم استفاده کرده که دانش‌آموزان با این منطقه آشنا شوند. فعالیت صفحه ۲۹؛ هدف حل مسئله به کمک تجزیه نیست فقط می‌خواهد با گذاشتن جواب‌ها در معادله به جواب نهایی برسند یعنی دانش‌آموز بفهمد که جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند. نکته‌ای که دانش‌آموز باید به آن نیم‌نگاهی داشته باشد؛ سپس در اینجا اشاره‌ای به گذشته می‌کند و اشاره‌ای به این نکته که حاصل ضرب دو عبارت وقتی صفر می‌شود که حداقل یکی از آنها صفر شود پس می‌تواند از این قانون برای حل مسئله استفاده کند. در تمرین ۲ فعالیت صفحه ۲۹ سؤال به گونه‌ای مطرح شده که چون برحسب مساحت است  $x^2$  و چون برحسب محیط است  $x$  را داشته باشیم و عدد ثابت نداشته باشد که باز هم بتوان از نکته بالا برای

حل مسئله استفاده کرد.

در کار در کلاس صفحه ۳۰، هدف این است که صورت مسئله به معادله تبدیل شود و هدف حل مسئله به کمک حدس زدن می باشد که با امتحان  $x = 5$  به دست می آید ولی تأکید می کند که این تنها جواب مسئله نیست جواب دیگر را نیز به دست آورید که  $x = -8$  می باشد ولی هیچ لزومی ندارد که همه جواب ها قابل قبول باشد. بستگی به شرایط مسئله، جواب ها را انتخاب می کنیم؛ که در اینجا چون مسئله سن مورد نظر است (-) منفی معنا ندارد.

### توصیه های آموزشی

دادن سؤالاتی که دانش آموز قادر باشد عبارت را به صورت یک معادله درجه اول در بیاورد؛ مثلاً می توان از این مسائل استفاده کرد:

۱ اگر مجموع مساحت مربع و مستطیلی که یک ضلع آن با ضلع مربع برابر باشد و ضلع دیگر ۶ واحد باشد، ۱۶ شود ضلع مربع را به دست آورید.

۲ اگر در برابر مساحت مربعی از مساحت مستطیلی که یک ضلع آن ۳ و ضلع دیگرش برابر ضلع مربع باشد ۵ واحد بیشتر باشد، ضلع مربع را به دست آورید. که می تواند با حدس زدن اعدادی مانند  $x=1$ ،  $x=2$ ،  $x=3$ ،  $x=1/5$ ،  $x=2/5$  و ... جواب هایی را برای این مسئله حدس بزند که چون طول ضلع است اعداد منفی در نظر نمی گیریم و برای تشکیل یک معادله سعی کنیم ریشه های گویا نیز به دانش آموزان داده شود مثلاً معادله ای تشکیل دهید که ریشه هایش  $0/3$ ،  $0/2$  و ضرب  $x^2$ ، ۵ باشد که فقط معادله منحصر به فرد باشد.

### اشتباهات رایج دانش آموزان

دانش آموزان در تشکیل معادله خیلی اشکال دارند. با مفهوم «۲ واحد بیشتر یا کمتر» یا «۵ برابر عددی از  $\frac{1}{3}$  عددی کمتر است یا بیشتر است» در گذاشتن علامت مثبت یا منفی دچار اشتباه می شوند.  
- در معادله درجه اول که به صورت  $ax=0$  در می آید معمولاً به جای  $x=0$ ، عدد  $-a = \lambda$  را به دست می آورند. در مساحت و محیط اشکال هندسی، اشتباه زیاد صورت می گیرد.

## حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس دوم

### اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ آشنایی با مفهوم معادله درجه دوم
- ۲ آشنایی با روش‌ها و فنون حل معادله درجه دوم
- ۳ ساختن معادله درجه دوم
- ۴ تعداد ریشه‌های معادله درجه ۲
- ۵ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها
- ۶ طرح و حل مسائل کاربردی از معادله درجه دوم

### روش تدریس

ابتدا در این فصل یادآوری از اتحادها و تجزیه انجام شده تا برای دانش‌آموز حل معادله به روش تجزیه، دشوار نباشد و با فعالیت باید جاهای خالی را پر کند. در فعالیت بعدی کم کم می‌خواهیم به کمک تشخیص نوع اتحاد و تجزیه آن، شروع به حل معادله کنیم. سه تایی آنها توسط مؤلف گفته شده و بقیه به عهده دانش‌آموزان می‌باشد. و با این وسیله با روش‌های حل معادله به کمک تجزیه آشنا می‌شوند که با توجه به سؤالات مطرح شده می‌توان فهمید که کدام روش بهترین روش برای حل معادله به کمک تجزیه می‌باشد. اگر  $c=0$  باشد روش فاکتورگیری و اگر  $b=0$  باشد به شرطی که  $a, c$  هم علامت نباشند اتحاد مزدوج و اگر  $a, c$  هم علامت باشند، نمی‌توان تجزیه کرد و همین جا می‌توان گفت که این معادله جواب ندارد. در روش بعدی برای عباراتی که به صورت  $a^2 + 2ab + b^2$  نوشته شود از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌شود که چون ریشه تکراری دارد به آن ریشه مضاعف می‌گویند. و سپس سه جمله که قادر به تجزیه باشد اتحاد یک جمله مشترک می‌باشد.

در روش مربع کامل کردن چون باید طرف چپ به صورت مربع کامل باشد حتماً قید می‌شود که ضریب  $x$  را ابتدا



در ۲ ضرب و سپس تقسیم می‌کنیم و سپس مربع آن عددی که به ۲ تقسیم شده است را به طرفین اضافه می‌کنیم. در کار در کلاس صفحه ۳۲، هدف مرحله به مرحله حل کردن معادله درجه دوم و همچنین سرعت حل معادله می‌باشد که بین دانش‌آموزان رقابتی انجام شود که علاوه بر دقت در حل مسئله، زمان را نیز پیگیری کنند. در فعالیت بعدی که در صفحه ۴۴ می‌باشد حل معادله به کمک کلی می‌باشد که قبل از شروع به حل از دانش‌آموزان خواسته شود  $a, b, c$  را ابتدا بنویسند سپس  $\Delta$  را تشکیل دهند،  $\Delta$  را به درستی به دست آورند و در علامت‌ها اشتباهی صورت نگیرد و چون  $\Delta > 0$  دو ریشه دارد،  $\Delta < 0$  ریشه ندارد.  $\Delta = 0$  یک ریشه دارد. در کار در کلاس صفحه ۴۵ با اشاره به مجموع ریشه‌ها یعنی رابطه  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  می‌باشد که فقط همین را می‌خواهد.

در طرح مسئله می‌خواهد دانش‌آموزان کم کم با مسائل اقتصادی که در آینده با آن برخورد می‌کنند آشنا شوند و هدف از نام بردن تابع هزینه، درآمد و سود، مفهوم آن تابعی که معلمین عزیز در ذهن خود دارند نیست بلکه فقط اسامی می‌باشد تا شروعی برای مفهوم تابع در فصل آینده باشد. با طرح اولین مسئله از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که تابع درآمد و هزینه را خودشان با جاهای خالی به دست آورند که در رابطه درآمد نوشته فارسی را به ریاضی و تابع هزینه روابط فارسی را به ریاضی و ریاضی را به فارسی تبدیل کنند و همچنین گوشزد شود که در تابع هزینه همیشه یک مقدار ثابت به عنوان هزینه اولیه وجود دارد و سپس رابطه سود را به دست آورند.

در مسئله دوم، به نقطه سر به سر که در مسائل اقتصادی زیاد به کار برده می‌شود، اشاره می‌کند یعنی نقطه‌ای که سود صفر است یعنی نه سود اتفاق می‌افتد و نه زیان و باید  $P(x) = 0$  باشد و آنگاه  $P(x) = C(x)$  می‌شود؛ در واقع نقطه سر به سر نقطه‌ای است که درآمد و هزینه یکسان می‌باشد که در مثال الف؛ کافی است برای اینکه چیزی نفروشد  $x = 0$  قرار دهیم که  $x = -100$  به دست می‌آید. در قسمت ب، باید تابع سود برابر صفر باشد  $P(x) = 0$  یعنی حل معادله  $5x^2 + 8/15x - 100 = 0$  که کافی است به دانش‌آموزان بگویید برای حل این مسئله با روش  $\Delta$  می‌توانند از ماشین حساب کمک بگیرند و  $\Delta$  عددی مثبت است پس  $x = 12/35$  و  $x = 2000$  می‌باشد.

در قسمت پ، که بیشترین سود را می‌خواهد، کافی است اعدادی را به دانش‌آموز بدهیم و بعداً با جای‌گذاری، بیشترین مقدار را به دست آوریم؛ مثلاً  $x = 1000$ ،  $x = 1005$ ،  $x = 1006$  و  $x = 1007$ . با توجه به اینکه خودمان می‌دانیم که  $x = 1006/17$  می‌باشد چون رأس سهمی است باید اعداد را در نزدیکی همان عدد انتخاب کنیم و با قراردادن  $x = 1006$  به بیشترین مقدار برسیم. اگر دانش‌آموز گفت این عدد از کجا به دست آمده بگویید در فصل آینده شما هم می‌توانید این عدد را به دست آورید؛ کافی است نقاط قبلی

را با هم جمع کنیم سپس تقسیم بر ۲ کنیم؛ یعنی  $\frac{2000 + 12/25}{2}$ .

### توصیه‌های آموزشی

در روش حل معادله به روش تجزیه سعی کنید از مثال‌هایی استفاده کنید که به راحتی قابل تجزیه باشند تا دانش‌آموزان دید خوبی نسبت به این روش پیدا کنند که اگر این روش را یاد بگیرند به سرعت حل معادله درجه دوم کمک می‌کند.

و در عبارت  $4x^2 + 10x + 6 = 0$  با اینکه همه عبارت بر ۲ بخش پذیر است بهتر است ساده نکنیم چون خود  $4x^2$  به صورت مربع کامل است.  $(2x)^2 + 5(2x) + 6 = 0$  که به راحتی تجزیه شود.

$$(2x+2)(2x+3) = 0$$

قبل از حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن از دانش‌آموزان بخواهیم ابتدا معادله  $x^2 = 36$  سپس  $(x+1)^2 = 36$  را حل کنند چون هدف این است که معادله درجه دوم را به صورت مربع کامل درآوریم. به دانش‌آموزان تأکید کنیم که ممکن است برای یک معادله درجه دوم جواب به دست آوریم و جواب مورد نظر قابل قبول نباشد؛ مثلاً طول ضلع یا زمان یا سن مورد نظر باشد و اگر اعداد منفی به دست آید قابل قبول نیست یا هدف مسئله به دست آوردن عدد طبیعی باشد و ما اعدادی مانند  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{2}{3}$  به دست آوریم.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

در تجزیه به علامت‌ها خیلی دقت کنند. معمولاً در علامت‌ها اشتباه زیاد رخ می‌دهد؛ مثلاً در تجزیه  $x^2 - 5x + 6 = 0$  دو عدد پیدا کنید که حاصل جمع ۵- و حاصل ضربشان ۶ باشد که بخواهیم تجزیه را انجام دهیم.  $(x-2)(x-3) = 0$  ولی جواب‌ها  $x=2$  و  $x=3$  می‌باشد و  $x^2 + 5x + 6 = 0$  دو عدد که جمعشان ۵ و ضربشان ۶- باشد  $(x+6)(x-1) = 0$  که  $x=-6$  و  $x=1$  می‌باشد.

● در مربع کامل کردن بعد از اضافه کردن مربع (نصف ضریب  $x$ ) مجدداً به صورت مربع کامل باید بنویسیم که در علامت و جذر آن عددی که مربع کامل شده دچار مشکل می‌شوند.

● در مجموع ریشه‌ها  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  است که در فصل بعد که رأس سهمی را می‌خوانند  $x = \frac{-b}{2a}$  این دو فرمول با هم اشتباه گرفته می‌شود.

## معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

درس سوم

### اهداف درس سوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

۱ حل معادلات کسری یا گویا

۲ بتوانند مسائل کاربردی را از طریق معادلات گویا حل کنند.

### روش تدریس

یادآوری از کتاب نهم می‌باشد که هدف ساختن یک معادله گویا یا کسری است و حل آن منجر به یک معادله درجه اول می‌شود، می‌توان زمان را محاسبه کرد.

شرط تعریف شدن یک عبارت گویا یا کسری این است که مخرج هیچ‌گاه صفر نشود و تأکید می‌کنیم برای حل معادله گویا همه عبارت را به یک طرف انتقال دهیم و سپس مخرج مشترک بگیریم تا بعد از ساده‌شدن عبارت به صورت  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  درآید، سپس صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. جواب‌هایی قابل قبول است که مخرج را صفر نکند زیرا کسری که مخرج آن ناصفر باشد فقط و فقط وقتی صفر است که صورت آن صفر باشد.

در مثال آخر صفحه ۴۹، یادآور می‌شویم که هر معادله جوابش در خود معادله صدق می‌کند، با قراردادن جواب مسئله در معادله می‌توان متغیرهای دیگر را به دست آورد.

سپس با آوردن سه مثال متفاوت از مسائل کاربردی، آنها را به معادله گویا تبدیل می‌کنیم و سپس شروع به حل آنها می‌کنیم. در مثال گلدان نقره می‌توان وزن مس را برابر با  $x$  و یا وزن نقره را  $x$  در نظر بگیریم. چنانچه وزن مس را  $x$  در نظر بگیریم، راحت‌تر است. و حواسمان باشد که وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن را می‌خواهد.

## توصیه‌های آموزشی

معمولاً این گونه مسائل برای دانش‌آموزان یک مقدار مشکل می‌باشد که اگر قرار باشد یک معادله را به معادلات گویا تبدیل کنند بهتر است در این زمینه مسائل مختلف داده شود تا دانش‌آموز بتواند با این مسائل ارتباط برقرار کند.

در جواب مسائل گویا یا کسری به ویژه آنهایی که کاربردی هستند امکان دارد جوابی به دست آید که مخرج را صفر نکند ولی قابل قبول هم نباشد؛ مثلاً زمان یا تعداد روزها که منفی درآید.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

یکی از اشتباهات رایج در عبارت‌های گویا که یکی از اعداد آن ثابت است، این است که در مخرج مشترک‌گیری عدد ثابت را در مخرج مشترک ضرب نمی‌کنند و یادشان می‌رود برای مثال:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} = 0 \quad \xrightarrow[\text{در صورتی که باید باشد}]{\text{قرار می‌دهند}} \frac{6(x+2) - 6x - 0}{6(x)(x+2)} \rightarrow -1x(x+2)$$

- عدد منفی قبل از عبارت باید در تک تک عبارات ضرب شود که این کار هم کمتر اتفاق می‌افتد.
- جواب‌ها را امتحان نمی‌کنند که بدانند قابل قبول است یا نیست.

## تمرین

هر کدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

۱ الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه ۲، مساوی سه برابر آن عدد ۲- باشد.

عدد را  $x$  در نظر می‌گیریم

$$5x + 2 = 3x - 2$$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

عدد را  $x$  در نظر می‌گیریم

$$x^2 = x + 1$$

۲ در یک کارخانه حقوق یک مهندس، دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و  $\frac{2}{3}$  مدیر بخش خود است.

قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

$$x = \text{حقوق مهندس}$$

$$3 \times \frac{3}{2}x + 8x + 12 \times \frac{x}{2} = 55,500,000$$

$$\frac{x}{2} = \text{فن ورز}$$

$$\frac{9x}{2} + 14x = 55,500,000 \Rightarrow 37x = 111,000,000$$

$$\frac{3}{2}x = \text{مدیر بخش}$$

$$x = 3,000,000 \leftarrow \text{فن ورز } 1,500,000$$

۲ با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟ اختلاف تولید در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$8x = 2 \times 4x = \text{سه شنبه} \quad 4x = 2(2x) = \text{دوشنبه} \quad 2x = \text{یکشنبه} \quad x = \text{شنبه}$$

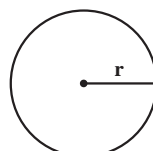
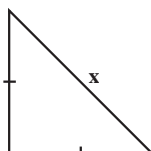
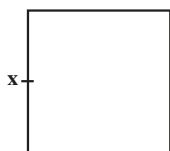
$$16x = 64,000 = \text{پایان روز چهارشنبه} \quad 2 \times 8x = 16x = \text{چهارشنبه}$$

$$x = \frac{64,000}{16} = 4,000 \text{ تن}$$

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 31x = 31 \times 4,000 = 124,000 \text{ تن}$$

$$\text{تن بوده } 64,000 - 4,000 = 60,000$$

۴ اگر مجموع مساحت های سه شکل زیر برابر ۷ باشد طول ضلع مربع را بیابید.



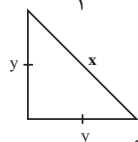
$$r = \frac{1}{\sqrt{2n}} x$$

$$7 = \text{مساحت دایره} + \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

$$7 = \text{مساحت دایره} + \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

جواب :

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} = 7 \rightarrow \frac{4x^2 + x^2 + 2x^2}{4} = 7$$



$$S = \frac{1}{2} \times y \times y \rightarrow \frac{1}{2}y^2 \text{ مثلث}$$

$$\pi r^2 = \text{مساحت دایره}$$

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} x^2 \right)$$

$$= \pi \times \left( \frac{1}{\sqrt{2n}} x \right)^2 = \frac{\pi \times x^2}{2n} = \frac{x^2}{2}$$

$$2y^2 = x^2$$



ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و بود و نخ قالی و... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$۳۵/۰۰۰/۰۰۰ - ۵/۶۰۰/۰۰۰ = ۲۹/۴۰۰/۰۰۰$$

$$۱۹۶۰x = ۲۹/۴۰۰/۰۰۰ \rightarrow x = \frac{۲۹/۴۰۰/۰۰۰}{۱۹۶۰} = ۱۵۰۰۰ \text{ تومان}$$

### تمرین صفحه ۳۷

۱) معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } ۲x^2 - ۸ = 0 \rightarrow ۲(x^2 - ۴) = ۲(x-۲)(x+۲) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$$\text{ب) } (x+۲)(x-۳) = x-۳ \rightarrow x^2 - x - ۶ - x + ۳ = 0 \Rightarrow x^2 - ۲x - ۳ = 0 \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$\text{یا } (x+۲)(x-۳) - (x-۳) = 0$$

$$(x-۳)[x+۲-۱] = (x-۳)(x+۱) = 0$$

$$\text{پ) } x^4 - ۲x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - ۲) = 0 \Rightarrow x^2(x - \sqrt{۲})(x + \sqrt{۲}) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 = ۲$$

$$x = \sqrt{۲}$$

$$x = -\sqrt{۲}$$

$$\text{ت) } x^2 = x - \frac{1}{4} \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 - ۲(\frac{1}{4}x) + (\frac{1}{4})^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{4})^2 = 0 \rightarrow x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{ث) } ۲x^2 - ۸x = 0 \rightarrow ۲x(x-۴) = 0 \rightarrow ۲x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } x-۴ = 0 \rightarrow x = ۴$$

$$\text{ج) } x^2 - ۵x + ۶ = 0 \rightarrow (x-۲)(x-۳) = 0$$

$$x-۲ = 0 \text{ یا } x-۳ = 0$$

$$x = ۲ \text{ یا } x = ۳$$

$$\text{ج) } \frac{x^2}{3} = x \rightarrow \frac{x^2}{3} - x = 0 \rightarrow x(\frac{x}{3} - 1) = 0 \quad \underline{x=0} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x-3}{3} = 0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow \underline{x=3}$$

$$\text{ح) } x^2 = 5 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 5 = 0 \rightarrow 2x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{5})(\sqrt{2}x + \sqrt{5}) = 0 \rightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{خ) } x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x^2 + 2(2x) + (2)^2 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$\text{د) } 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$$

$$(3x+2)(3x-1) = 0$$

$$3x+2=0 \rightarrow 3x=-2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$3x-1=0 \rightarrow 3x=1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ذ) } (x-3)^2 = 4 \rightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \rightarrow [(x-3)-2][(x-3)+2] = 0 \rightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

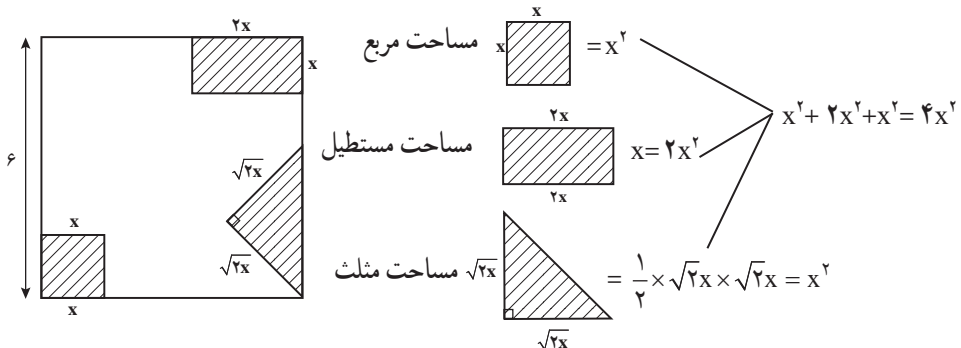
$$x-5=0 \rightarrow x=5$$

$$\text{یا } x-1=0 \rightarrow x=1$$

۲ از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل زیر بریده شده است، مساحت باقی مانده  $24 \text{ cm}^2$  است. طول ضلع

کوچک بریده شده چقدر است؟

$$6 \times 6 = 36 \quad \text{مساحت مربع}$$





$$36 - 4x^2 = 0 \rightarrow (9 - 2x)(9 + 2x) = 0$$

$$9 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ق. ق.}$$

$$9 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{9}{2} \text{ ق. غ. ق. نمی تواند منفی باشد.}$$

۲۳ معادله درجه دومی بنویسید که  $x=2$  و  $x=3$  جواب های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ چرا؟

$$x=2 \rightarrow x-2=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$x=3 \rightarrow x-3=0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 12 = 0 & \xrightarrow{\times 2} \\ -3x^2 + 15x - 18 = 0 & \xrightarrow{\times -3} \end{aligned}$$

خیر، می توان این معادله را در هر عدد ثابت ضرب کرد مثل :

۲۴ معادله درجه دومی بنویسید که  $x=1$  ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x=1 \rightarrow (x-1)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x=1 \rightarrow (x-1)=0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$5x^2 - 10x + 5 = 0$$

خیر، می تواند در هر عدد ثابتی ضرب شود مانند :

$$-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

۲۵ در معادله  $(x-1)^2 = K$

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای  $K=2, K=4, K=0, K=-9$  به دست آورید.

$$(x-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \\ x-1 = -\sqrt{2} \rightarrow x = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad x-1=0 \rightarrow x=1$$

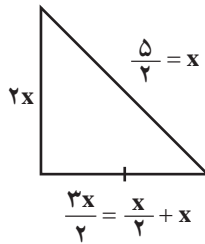
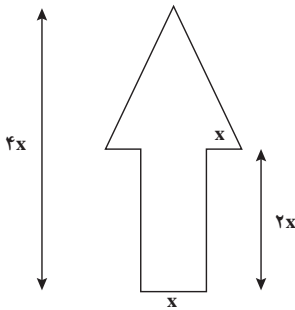
جواب ندارد چون توان دوم یک عدد هیچ وقت یک عدد منفی نمی باشد.

ب) به ازای چه مقادیری از  $K$  معادله ریشه مضاعف دارد؟ در صورتی که  $K=0$  باشد.

پ) به ازای چه مقادیری از  $K$  معادله ریشه حقیقی دارد؟ در صورتی که  $K > 0$  باشد یعنی یک عدد مثبت باشد.

ت) به ازای چه مقادیری از  $K$  معادله ریشه حقیقی ندارد؟ در صورتی که  $K < 0$  باشد یعنی یک عدد منفی باشد.

۶ برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب سفید  $3^\circ$  تومان و هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب آبی  $1^\circ$  تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی  $27000$  تومان شده است.



مساحت مستطیل  $2x \times x = 2x^2$

مساحت مستطیل + مساحت مثلث  $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$

الف) اندازه  $x$  چقدر است؟

ارتفاع

$$\frac{1}{2} \times 2x \times 3x = 3x^2 \quad \text{مساحت مثلث}$$

قاعده مثلث

آبی سفید

$$5x^2 \times 3^\circ + (24000 - 5x^2)(1^\circ) = 27000$$

$$15^\circ x^2 + 24000 - 5^\circ x^2 = 27000 \Rightarrow 10^\circ x^2 = 3000$$

$$x^2 = \frac{3000}{10^\circ} = 3^\circ$$

$$x = \sqrt{3^\circ}$$

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی مطابق شکل کتاب درسی از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه  $1 \text{ cm}$  آن  $100$  تومان است هزینه رنگ آمیزی تابلو  $34800$  تومان می شود. در این حالت اندازه  $x$  چقدر است؟

باید محیط فلش نیز اضافه شود.  $p = 12x \Leftrightarrow (2x + 2x + x + x + x + 2 \times \frac{5}{2}x)$  می باشد.

سفید آبی

$$5x^2 \times 3^\circ + (24000 - 5x^2)(1^\circ) + 12x \times 100 = 34800$$

$$15^\circ x^2 + 24000 - 5^\circ x^2 + 1200x - 34800 = 0$$

$$10^\circ x^2 + 1200x - 10800 = 0$$

$$10^\circ(x^2 + 120x - 1080) = 0 \rightarrow x^2 + 120x - 1080 = 0$$

$$a=1$$

$$b=12$$

$$c=-108$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(1)(-108) = 144 + 432 = 576$$

$$x = \frac{-12 \pm 24}{2}$$

غ.ق.ق  $-\frac{36}{2} = -18$

ق.ق  $\frac{12}{2} = 6$

### تمرین صفحه ۴۳

معادلات درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

مربع نصف ضریب  $x$  را به طرفین اضافه می کنیم  $\rightarrow x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \quad x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ب)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$$9x^2 + 3x = 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{6}x\right) + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$$

$$x + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$x + \frac{1}{6} = -\frac{3}{6}$$

$$x = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

پ)  $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

$$x^2 + x = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف

ت)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x^2 + 6x = -9$$

$$x^2 + 2(3x) + 9 = -9 + 9 \rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x+3 = 0 \rightarrow x = -3$$

ریشه مضاعف

## تمرین صفحه ۴۷

۱) معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$۱) x^2 - x + 5 = 0 \quad a=1 \quad b=-1 \quad c=5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = 1 - 20 = -19 < 0.$$
 معادله جواب ندارد.

$$۲) 2x^2 + x - 1 = 0 \quad a=2 \quad b=1 \quad c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4}{4} = -1 \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$۳) 4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow (2x)^2 - 2(2x) + 1 = (2x - 1)^2 = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$۴) x^2 + 17x - 18 = 0 \rightarrow (x + 18)(x - 1) = 0 \rightarrow x = -18, \quad x = 1$$

$$۵) 3x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow a=3 \quad b=-1 \quad c=4$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = 1 - 48 = -47 < 0.$$

معادله ریشه ندارد.

$$۶) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad a=1 \quad b=\sqrt{3} \quad c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

۲) معادله  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  را به روش  $\Delta$  حل کنید. با محاسبه ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  حاصل ضرب آنها را

به دست آورید.

$$a=2$$

$$b=-3$$

$$c=-5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49 \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = x_1 \\ x = \frac{-4}{4} = -1 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times -1 = -\frac{5}{2}$$

۳ اگر یکی از جواب‌های معادله  $2x^2 - ax + 28 = 0$  برابر  $-4$  باشد جواب دیگر این معادله چیست؟

در معادله به جای  $x$ ،  $-4$  قرار می‌دهیم چون جواب‌ها در معادله صدق می‌کند.

$$2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \rightarrow 2 \times 16 + 4a + 28 = 0$$

$$60 = -4a \rightarrow a = -15$$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0$$

$$a = 2$$

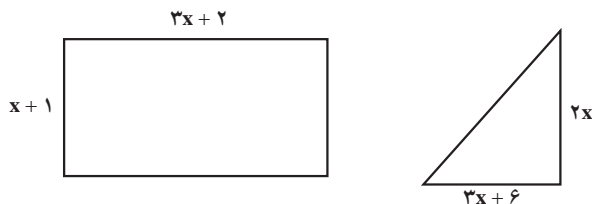
$$b = 15$$

$$c = 28$$

$$\Delta = (15)^2 - 4(2)(28) = 1$$

$$x = \frac{-15 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{-16}{4} = -4 \\ \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

۴ مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



$$(x+1)(3x+2) = \frac{\cancel{x}(3x+6)}{\cancel{x}}$$

$$\cancel{3}x^2 + 5x + 2 = \cancel{3}x^2 + 6x \rightarrow 2 = 6x - 5x \rightarrow x = 2$$



$x = 2$  طول و عرض مستطیل

عرض  $\rightarrow x+1 \rightarrow 3$   
 طول  $\rightarrow 3x+2 \rightarrow 8$

۵ کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار  $a$  همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف)  $x^2 + ax - 1 = 0$

$$a = 1$$

$$b = a$$

$$c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a)^2 - 4(1)(-1) = a^2 + 4 > 0 \quad \text{همواره مثبت است پس جواب دارد.}$$

ب)  $x^2 - x + a = 0$

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a \quad \text{بستگی به } a \text{ دارد.}$$

\*۶ نشان دهید در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a + c = b$  باشد یکی از ریشه‌ها برابر  $-1$  و دیگری  $x = -\frac{c}{a}$  است.

$$-b = -(a+c)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{-(a+c) \pm \sqrt{+(a+c)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-a-c \pm \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{-a-c \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\cancel{a} - c + \cancel{a} - c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a} \\ x &= \frac{-a - \cancel{c} - a + \cancel{c}}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1 \end{aligned}$$

دو حالت دارد

\*۷ با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$

برابر  $\frac{c}{a}$  است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \times 2a} = \text{اتحاد مزدوج}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b)^2 - \sqrt{(b^2 - 4ac)^2}}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + \cancel{4}ac}{\cancel{4}a^2} = \frac{c}{a}$$

\* ۸: نشان دهید در هر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد  $(a+b+c=0)$  یکی از ریشه‌های معادله  $x=1$  و دیگری  $x = \frac{c}{a}$  است.  $a+c=-b$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{a + \cancel{c} + a - \cancel{c}}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

$$x_2 = \frac{\cancel{a} + c - \cancel{a} + c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

## تمرین صفحه ۵۲

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱  $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

$$\frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{(3x-5) - 1(x+3)}{x+3} = \frac{3x-5-x-3}{x+3} = \frac{2x-8}{x+3} = 0$$

ق.ق  $2x-8=0 \rightarrow x=4$

۲  $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3) + (2x+5)x - 5x(x+3)}{x(x+3)} =$$

$$\frac{\cancel{3x^2} + \cancel{3x} - 6 + \cancel{2x^2} + \cancel{5x} - \cancel{5x^2} - \cancel{15x}}{x(x+3)} = \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \rightarrow -3x-6=0 \rightarrow -3x=6 \rightarrow x=-2$$

۳  $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

$$\frac{2+x}{x+2} - x - 3 = \frac{(x+2) - (x+3)(x+2)}{x+2} = \frac{x+2-x^2-5x-6}{x+2} = 0$$

غ.ق.ق  $-x^2-4x-4=0 \rightarrow x^2+4x+4=0 \rightarrow (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2$

چون ریشه مخرج است پس این معادله جواب ندارد.

$$\text{۴} \quad \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{(x-1)}{x-2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - \overbrace{(1+x)(x-2)}^{x^2 - x - 2} - x(x-1)}{x(x-2)} = 0$$

$$\text{م.خ.م: } x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{x^2} + \cancel{x} + 2 - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x(x-2)} = \frac{-x^2 + 4}{x(x-2)} = 0 \rightarrow -x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \begin{cases} x=2 \text{ ق.ق.غ} \\ x=-2 \text{ ق.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{۵} \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{3(x+3)(x-2)}^{x^2+x-6} - \overbrace{2(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2} - \overbrace{4(x-1)(x+3)}^{x^2+2x-3}}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\frac{3x^2 + 3x - 18 - 2x^2 + 6x - 4 - 4x^2 - 8x + 12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{-3x^2 + x - 10}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 + x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = -10 \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-3)(-10) = 1 - 120 = -119 < 0 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$\text{۶} \quad \frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x+3}{\underbrace{2-x}_{-(x-2)}} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{x^2 - 4} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-3}{x+2} = 0$$



$$\frac{11 - \overbrace{(x+3)(x+2)}^{x^2+5x+6} - \overbrace{(2x-3)(x-2)}^{2x^2-7x+6}}{(x-2)(x+2)} = 0.$$

$$\text{م.خ.م: } x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 7x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0.$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 < 0. \quad \text{معادله ریشه ندارد.}$$

✓ مجموعه معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر  $\frac{5}{12}$  است آن دو عدد را بیابید.

$2k \rightarrow 2k+2$  عدد زوج باید مضربی از ۲ باشد.

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} - \frac{5}{12} = 0.$$

$$\frac{6(k+1) + 6k - 5k(k+1)}{12k(k+1)} = \frac{6k + 6 + 6k - 5k^2 - 5k}{12k(k+1)} = 0.$$

$$\text{م.خ.م: } 12k(k+1)$$

$$a = -5$$

$$-5k^2 + 7k + 6 = 0 \quad b = 7$$

$$c = 6$$

$$\Delta = 49 + 120 = 169$$

$$k = \frac{-7 \pm 13}{-10} \begin{cases} \rightarrow k = 2 \\ \rightarrow k = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

ق.ق

غ.ق.ق

پس آن دو عدد ۲ و ۴ هستند.

اگر  $k=2$  باشد اعداد زوج متوالی ۴ و ۶ که معکوس آنها  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{6}$  می باشد.

۸ هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند فیش حقوقی کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر

چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد در این صورت

هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

زمان انجام کار توسط چاپگر جدید بر حسب ساعت :  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  چاپگر جدید

زمان انجام کار، توسط چاپگر قدیمی بر حسب ساعت :  $x+3 \rightarrow \frac{1}{x+3}$  چاپگر قدیمی

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{4(x+3) + 4x - x(x+3)}{4x(x+3)} = 0$$

$$4x + 12 + 4x - x^2 - 3x = 0 \rightarrow -x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 25 - 4(-1)(12) = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2} \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{-2} < 0 \quad \text{غیر قابل قبول} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$$

در نتیجه اگر چاپگر به تنهایی کار کند، فیش حقوقی کارگران را در مدت زمان  $\frac{5 + \sqrt{73}}{2}$  ساعت و چاپگر قدیمی تر در مدت زمان  $\frac{5 + \sqrt{73}}{2} + 3$  ساعت این کار را انجام می دهد.

۹- به ازای چه مقدار  $k$ ، معادله  $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$  دارای جواب  $t = -3$  است؟  
به جای  $t = -3$  قرار می دهیم.

$$\frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{((-3)^2 + 1)^2 - 68}$$

$$\frac{4+3}{2+6} = \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{7}{8} - \frac{27+k}{32} = 0$$

$$\frac{4 \times 7 - 27 - k}{32} = 0 \rightarrow \frac{28 - 27 - k}{32} = \frac{1-k}{32} = 0 \rightarrow 1-k = 0 \rightarrow \underline{k=1}$$

## فصل ٣

تابع

## نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۴ درس است. دانش‌آموزان در این کتاب برای اولین بار با مفهوم تابع، ضابطه جبری تابع و توابع درجه دوم و رسم آنها آشنا می‌شوند.

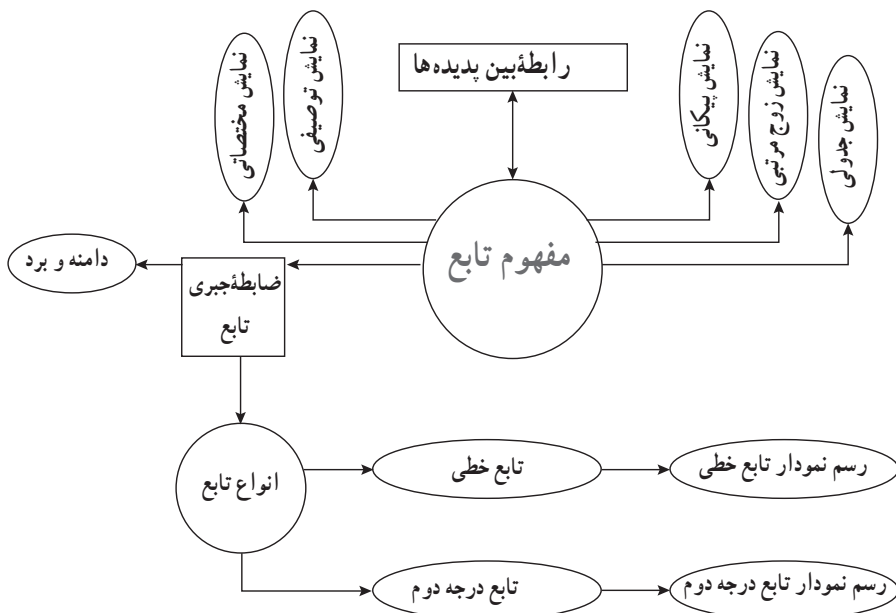
درس اول از این فصل در ابتدا به معرفی رابطه بین پدیده‌های مختلف در دنیای واقعی می‌پردازد و رابطه بین پدیده‌ها در جهان طبیعت را به عنوان ارتباط بین دو متغیر مختلف معرفی می‌کند. سپس به رابطه خطی از کتاب نهم اشاره کرده و به مفهوم تابع می‌پردازد.

درس دوم رابطه بین  $x$  به عنوان متغیر مستقل و  $y$  به عنوان متغیر وابسته را با یک قانون یا ضابطه معرفی می‌کند و در ادامه دامنه و برد معرفی شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

درس سوم ضمن یادآوری رابطه خطی کتاب نهم با مشخص کردن نقاط در صفحه محورهای مختصات و قرار گرفتن نقاط در یک راستا در کنار هم به معرفی تابع خطی و رسم نمودار آن می‌پردازد.

درس چهارم با معرفی تابع درجه دوم و رسم آن به کمک جدول و نقطه‌یابی و پیدا کردن مختصات رأس سهمی، به معادله محور تقارن و مسائل کاربردی این نوع تابع اشاره دارد.

## نقشه مفهومی



## دانستنی‌هایی برای معلم

تابع یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم دیگر نیز نقش بسزایی ایفا می‌کند. در کتاب‌های مختلف برای معرفی تابع روش‌های گوناگونی به کار گرفته می‌شود که البته همه آنها اهداف خود را دنبال می‌کنند. در هر حال مفهوم تابع منحصربه‌فرد است اما ابزار معرفی آن متفاوت است. در این کتاب مفهوم تابع با ارتباط بین پدیده‌های مختلف بررسی گردیده است.

**تاریخچه تابع:** تاریخچه تابع نسبتاً کوتاه است. کلانین در سال (۱۶۴۲-۱۵۶۴) اولین اشاره به وابستگی بین دو کمیت را به گالیله نسبت داد. در سال ۱۶۷۳ در نسخه خطی لایپ نیتز لغت تابع استفاده شد. او در سال ۱۷۱۴ این لغت را برای کمیت‌های وابسته به یک متغیر استفاده کرد. نماد  $f(x)$  توسط اویلر (Euler) در سال ۱۷۳۴ معرفی شد.

در سال ۱۹۳۰، N. Luzin ریاضی‌دان مشهور روسی دربارهٔ تابع نوشت:

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات مدرن است. این مفهوم به یکباره به وجود نیامده است بلکه از دو قرن پیش ابتدا از دل یک مباحثه روی یک سری پیام ارتعاشی به وجود آمده و به مرور دستخوش تغییرات عمیقی شده است. از آن زمان تاکنون این مفهوم عمیق‌تر شده و به‌طور پیوسته رشد کرده است. امروزه در خود علم ریاضی نیز تابع و مفهوم آن زیربنای شکل‌گیری بسیاری از مفاهیم و موضوعات اساسی ریاضی همچون حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال و غیره است.

## منابع دانستنی‌هایی برای معلم

۱ سایت واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف بخش مقالات علمی، پژوهشی و منابع پشتیبان کتاب‌های جدیدالتألیف

۲ M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford university press, 1972

۳ N. Luzin, function, Mathematical Evolutions, 2002

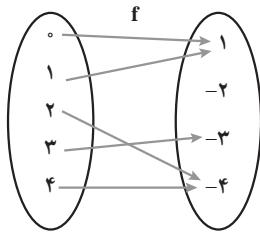
## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ برای هریک از روابط زیر نموداری رسم کنید. کدام یک تابع است؟

الف)  $f = \{(1,0), (0,1), (2,0)\}$  پ)  $h = \{(x,y) \mid 5y-3=0\}$

ب)  $g = \{(x,y) \mid 3x-1=0\}$  ت)  $k = \{(x,y) \mid |y|=2\}$

۲ مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان بیابید که دو زوج مرتب  $(3, x-y)$  و  $(1, x)$  با هم مساوی باشند.



۳ تابع  $f$  به صورت نمودار پیکانی رسم شده است.

الف) تابع را به صورت مجموعه زوج مرتب نمایش دهید.

ب) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

پ) نمودار مختصاتی تابع را رسم کنید.

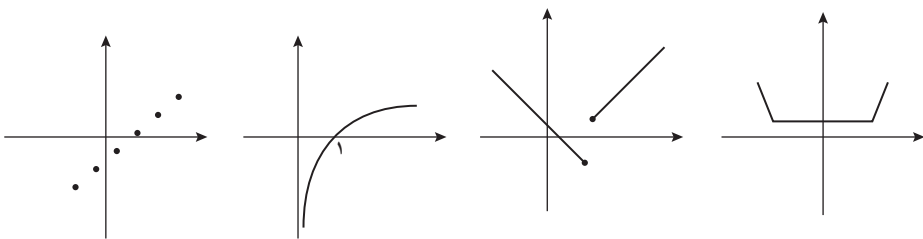
۴ تابع  $f = \{(x,y) \mid y=2x-1, x \in \mathbb{N}, x < 4\}$  مفروض است.

الف) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

۵ تابع  $f = \{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 0\}$  را به صورت زوج مرتب نمایش داده و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۶ کدام یک از نمودارهای زیر، تابع است؟



۷ تابع  $f = \{(x,y) \mid y=2x-1, 0 \leq x \leq 5\}$  مفروض است.

الف) قانون تابع را به صورت توصیفی بنویسید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید و به کمک نمودار، دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۸ اگر داشته باشیم:  $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=6, \dots$  قانون تابع  $f$  را به صورت توصیفی بیان کنید.

۹ مختصات چند نقطه از تابع  $f = \{(x,y) \mid y=3\}$  را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱۰ کدام یک از روابط زیر تابع است؟

(الف) رابطه بین هر انسان با اثر انگشت او

(ب) رابطه بین هر شخص با شماره تلفن همراه او

(پ) رابطه بین درجه حرارت ها در فصول مختلف و نوع پوشش افراد

(ت) رابطه ساختمان مولکولی DNA با انسان ها

۱۱ نمودار توابع درجه دوم زیر را رسم کنید. در هر یک مختصات رأس، معادله محور تقارن و مقادیر

ماکزیمم و مینیمم سهمی را مشخص کنید.

(الف)  $y = (x+1)^2 + 3$

(ب)  $y = -3x^2 + 4x - 1$

(پ)  $y = x^2 + 2x + 1$

(ت)  $y = -x^2 + 2x - 1$

۱۲ جدول زیر نرخ سود سپرده یک ساله بانک ها در ده سال کشورمان را نشان می دهد.

ت بر حسب سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
نرخ سود بر حسب درصد	۱۳	۱۴	۱۷	۱۶	۱۲	۱۴	۱۷	۱۷	۲۳/۵	۲۲

(الف) متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید.

(ب) آیا داده های جدول یک تابع را مشخص می کند؟ چرا؟

۱۳ شمعی به طول ۱۰ سانتی متر را روشن کرده ایم. اگر این شمع در هر دقیقه ۵/۰ سانتی متر کوتاه تر

شود، (الف) رابطه بین زمان (بر حسب دقیقه) و طول شمع (بر حسب سانتی متر) را به صورت ریاضی بنویسید.

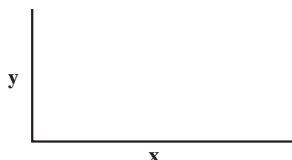
(ب) متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید. (ج) چه زمانی طول شمع به صفر می رسد؟

۱۴ زمینی به شکل مستطیل داریم که مطابق شکل سه طرف آن را با نرده ای به طول ۱۲۰ متر محصور

کرده ایم.

(الف) مساحت زمین را بر حسب طول زمین (x) بنویسید.

(ب) مختصات نقطه ماکزیمم تابع مساحت را به دست آورید.



۱۵ تابع سود یک کارخانه ساخت ماشین آلات کشاورزی به صورت زیر است :

$$p(x) = -1000 + 500x - 2x^2 \text{ که در آن } a \text{ تعداد کالای روزانه است.}$$

ماکزیم سود روزانه این کارخانه را تعیین کنید.

۱۶ فرض کنید تابع هزینه تولید  $x$  کالا  $C(x) = 20x - 1000$  و قیمت فروش یک کالا  $10 - x$  باشد،

الف) تابع سود را بیابید.

ب) ماکزیم سود را ترسیم کنید.

\* ۱۷ ثابت کنید مختصات رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت  $\left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  است.

## ابزار فناوریانه

معلمین عزیز می توانند از نرم افزار Cacogebra برای آموزش رسم نمودارهای تابع خطی و تابع درجه دوم بهره گیرند.

## معرفی منابع

۱ [www.study.com/academy/Lesson](http://www.study.com/academy/Lesson)

۲ [www.shsu.edu/kws006/precalculus](http://www.shsu.edu/kws006/precalculus)

۳ [www.wmueller.com/precalculus/function](http://www.wmueller.com/precalculus/function)

۴ [www.cut-the-knot.org/Do-you-know/function ex.](http://www.cut-the-knot.org/Do-you-know/function-ex)

۵ تابع، احمد قندهاری، حمیدرضا امیری/ انتشارات مدرسه



# مفهوم تابع

## درس اول

### اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ درک مفهوم رابطه بین دو کمیت
- ۲ آشنایی با متغیرهای مستقل و وابسته و درک رابطه بین آنها
- ۳ آشنایی با تعریف زوج مرتب
- ۴ درک مفهوم تابع
- ۵ آشنایی با نمایش‌های مختلف تابع (توصیفی، جدولی، ...)

### ابزار مورد نیاز

- ۱ صفحه شطرنجی
- ۲ خط‌کش

### روش تدریس درس اول

درس اول با یادآوری رابطه خطی شروع شده و ضمن آن با آوردن چند مثال به متغیر مستقل و وابسته اشاره می‌گردد.

اولین فعالیت این درس صفحه ۵۶ جهت آشنا کردن دانش‌آموزان با مفهوم ارتباط بین دو کمیت و همچنین مفهوم متغیر مستقل و وابسته آورده شده است. هدف دیگر آشنایی دانش‌آموزان با رابطه غیرخطی است که به شکل جدولی این رابطه نیز توجه شده است. در این فعالیت رابطه بین متغیرهای مساحت و شعاع و نیز محیط و شعاع که برای دانش‌آموزان رابطه‌های آشنا و ملموس هستند، بررسی شده است.

در ادامه با معرفی زوج مرتب به فعالیت دوم می‌پردازد که هدف آن آشنایی دانش‌آموزان با شکل زوج مرتبی متغیرهای  $x, y$  و درک ارتباط بین آنها است.

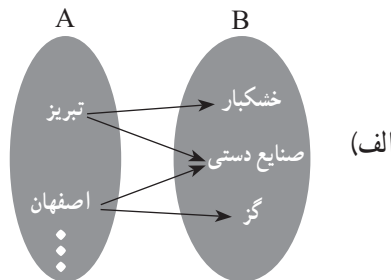
در این فعالیت دانش‌آموزان به صورتی غیرمستقیم و بدون اشاره به مفهوم و تعریف تابع با قرار دادن  $x$  در معادله داده شده مقدار تابع را که همان  $y$  باشد به دست می‌آورند.

اولین کار در کلاس در صفحه ۵۷ کتاب با تمرین جای‌گذاری مقادیر  $x$  در رابطه خطی و تکمیل جدول، نمودار پیکانی مطرح شده و در ادامه، نمایش مختصاتی این رابطه‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد.

فعالیت صفحه ۵۹ با توجه به مفهوم تابع هدف‌گذاری شده است. هدف این فعالیت تشخیص توابع از بین رابطه‌های داده شده با نمایش‌های مختلف است.

دانش‌آموز در نمایش پیکانی باید توجه داشته باشد که اگر از عضوی در مجموعه اول بیش از یک پیکان خارج شود با تعریف تابع در تناقض است و همچنین اگر در نمایش زوج مرتبی در یک مجموعه دو زوج مرتب پیدا کند که مؤلفه‌های اول آنها برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر باشند باز هم با تعریف تابع تناقض ایجاد شده است و در نهایت در نمودار مختصاتی یک رابطه اگر دو نقطه با طول‌های مساوی و عرض‌های نابرابر پیدا کند همین تناقض ایجاد شده و آن نمودار مربوط به یک تابع نمی‌باشد.

در قسمت ۴ این فعالیت، دانش‌آموز باید با توصیف داده شده و به کمک تعریف تابع، تابع بودن یا نبودن هر رابطه را تشخیص دهد. در این قسمت می‌تواند در مواردی با رسم نمودار پیکانی این موضوع را به درستی تشخیص دهد:



(ب) واضح است که هر نفر دقیقاً یک تاریخ تولد دارد.

(پ) شهرهایی مانند تهران یا اصفهان بیش از یک نماینده در مجلس شورای اسلامی دارند.

(ت) در این توصیف مشخص است که قبله همه مسلمانان، کعبه است و از هر مسلمان فقط یک پیکان خارج شده که البته می‌دانیم این تابع نوعی تابع ثابت است.

و برای تثبیت مطلب بلافاصله کار در کلاس صفحه ۶۱ با همان هدف فعالیت قبلی مطرح گردیده است. همچنین نمایش‌های مختلف یک تابع کنار هم و مقایسه آنها و تبدیل نمایش‌ها به یکدیگر از اهداف دیگر این کار در کلاس بوده و به درک بیشتر دانش‌آموزان کمک شایانی می‌کند.

## توصیه‌های آموزشی

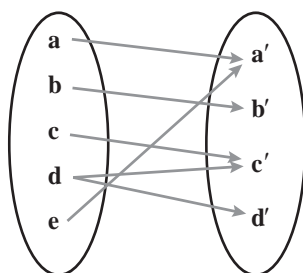
- ۱ در ورود به مطلب باید به روابط بین پدیده‌های مختلف اشاره کرد و مفهوم تابع به کمک آن بیان شود و به هیچ عنوان تعریف تابع با استفاده از مفهوم حاصل ضرب دکارتی مطرح نگردد.
- ۲ تعریف زوج مرتب به صورت دوتایی  $(x, y)$  که رابطه ترتیب روی آنها تعریف شده باشد، بیان شود.
- ۳ با توجه به مفهوم تابع در نمودار پیکانی توجه داشته باشید که از مجموعه اول حتماً باید پیکان خارج شود و تنها یک پیکان خارج شود.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ معمولاً دانش‌آموزان زوج مرتب  $(a, b)$  و  $(b, a)$  را مساوی فرض می‌کنند بهتر است با رسم نمودار چند نقطه در صفحه مختصات این کج‌فهمی مورد توجه قرار گیرد و یادآوری شود که تنها وقتی  $a=b$  باشد این دو با هم مساوی‌اند.
- ۲ به مرتب بودن  $(x, y)$  توجه نمی‌کنند و اکثراً مؤلفه اول از راست را  $x$  فرض می‌کنند.

## حل تمرین‌های درس اول

- ۱ نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



حل: حذف  $d$  از مجموعه سمت چپ یا حذف  $d'$  از مجموعه سمت راست

۲ اگر  $A$  مجموعه‌ای سه عضوی و  $B$  مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود، سه تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  را تعریف کنید.

حل :  $A = \{a, b, c\}$   $B = \{1, 2\}$

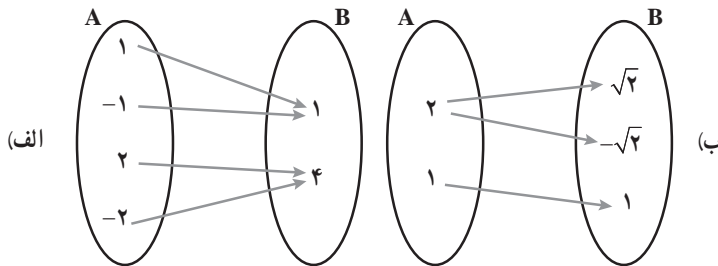
$$f = \{(a, b)(b, 1)(c, 1)\} \quad h = \{(a, 2)(b, 1)(c, 2)\} \quad g = \{(a, 1)(b, 2)(c, 1)\}$$

۳ در رابطه زیر، جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\} \Rightarrow f = \{(2, 3)(2, 5)(3, 1)(4, 2)\}$$

توجه دارید که تمرین‌های ۲ و ۳ باز پاسخ بوده و دانش‌آموزان جواب‌های درست و مختلفی می‌توانند برای این تمرین‌ها بیابند.

۴ کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



(الف) تابع هست

(ب) تابع نیست زیرا از ۲، دو پیکان خارج شده است.

(پ) تابع نیست زیرا مؤلفه اول ۲ برابر تکرار شده است.  $f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

(ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

(ث) تابع هست زیرا هر شخصی دقیقاً یک کد ملی دارد.

۵ اگر رابطه  $f$  تابع باشد، در این صورت حاصل  $x^2 + y^2$  را به دست آورید. (مجموعه  $f$  را پس از محاسبه  $x$  و  $y$  بنویسید.)

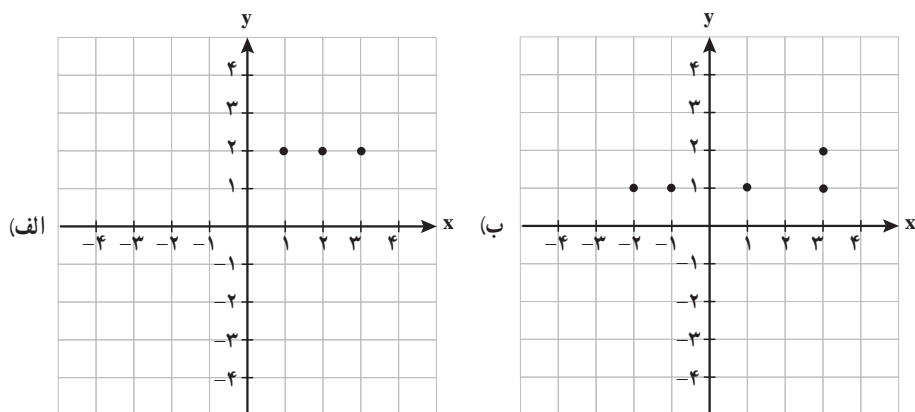
حل :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$$

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$f = \{(2, 4)(5, 2)(3, 4)\}$$

۶ نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



نمودار الف تابع هست.

حل: نمودار ب تابع نیست،

### خواندنی

توابع در شاخه‌های علوم مختلف کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بر روی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌بینیم.

## ضابطه جبری تابع

### درس دوم

### اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ تشخیص قانون بین متغیرهای  $x$  و  $y$
- ۲ تعیین دامنه و تعیین برد توابع با معلوم بودن ضابطه و دامنه

### ابزار مورد نیاز

- ۱ صفحه شطرنجی
- ۲ خط‌کش

### روش تدریس درس دوم

درس دوم این فصل با معرفی تابع به عنوان یک ماشین آغاز می‌شود و طی آن قانون یا ضابطه تابع معرفی می‌گردد. سپس با نمایش تابع به صورت زوج مرتب، دامنه و برد معرفی و پس از آن در فعالیت صفحه ۶۵ با مشخص کردن ضابطه و دامنه توابع، تعیین برد توابع را هدف‌گیری می‌کند و در همین حین به توابع مختلف چند جمله‌ای، کسری، رادیکالی اشاره می‌گردد (انواع توابع سال بعد در کتاب آمار و ریاضی (۲) معرفی خواهند شد).

اهداف کار در کلاس صفحه ۶۶ یکی تعیین دامنه و برد توابع با کمک نمودار است و دیگری با کسب اطلاعات از روی نمودار، تعیین ضابطه تابع است.

### توصیه‌های آموزشی

۱ آموزش ریاضی با مثال‌های عینی و کاربرد ریاضی در زندگی روزمره به درک بهتر دانش‌آموزان کمک می‌کند. در این درس معرفی تابع به منزله یک ماشین به درک و فهم آنها از ضابطه تابع و دامنه و برد آن کمک قابل توجهی می‌کند.

۲ در معرفی تابع  $f: A \rightarrow B$  قرار داده شده است که  $A$  دامنه تابع  $f$  است.

۳ اگر دامنه تابعی داده نشده باشد به طور پیش فرض، بزرگ‌ترین مجموعه نقاطی از اعداد حقیقی که برای ضابطه تابع تعریف شده باشد را، دامنه در نظر می‌گیریم.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

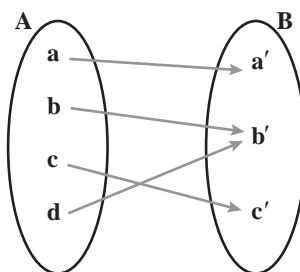
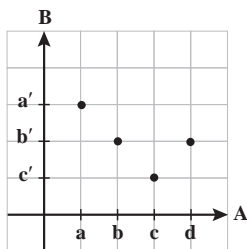
۱ معمولاً دانش‌آموزان در تعیین دامنه توابع کسری، مخرج کسر را بزرگ‌تر از صفر فرض کرده و دامنه را تعیین می‌کنند.

۲ در تعیین دامنه توابعی که نمودار آنها داده شده است، غالباً حتی اگر دامنه نامحدود باشد، تا جایی که نمودار رسم شده است و مشاهده می‌کنند به عنوان دامنه در نظر می‌گیرند. بهتر است با رسم پیکان در انتها، توجه دانش‌آموزان را به نامحدود بودن دامنه معطوف کنیم.

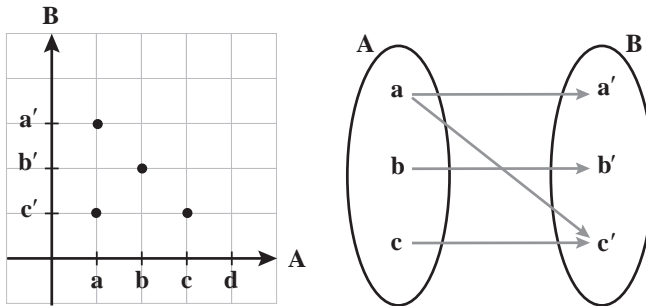
### حل تمرین‌های درس دوم

۱ کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.

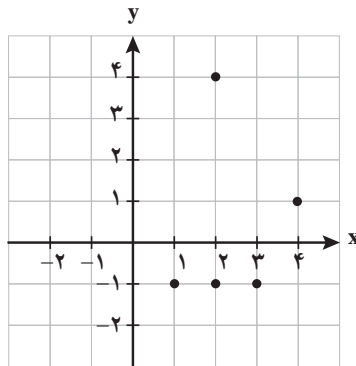
حل:



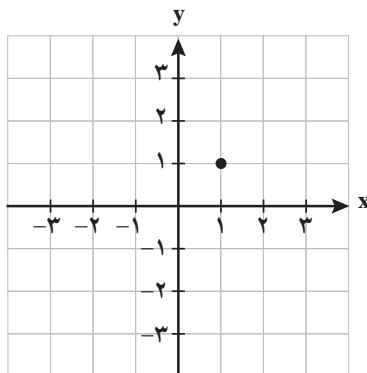
الف) تابع هست.



ب) تابع نیست زیرا از  $a$ ، دو پیکان خارج شده است.

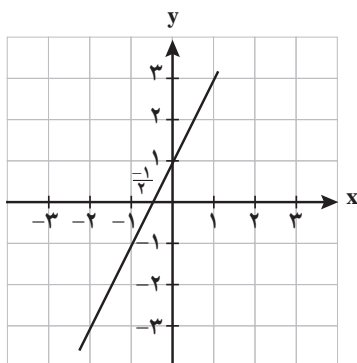


ب)  $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$  تابع نیست زیرا مؤلفه اول دو زوج مرتب مساوی هستند.



ت)  $g = \{(1, 1)\}$  تابع هست.

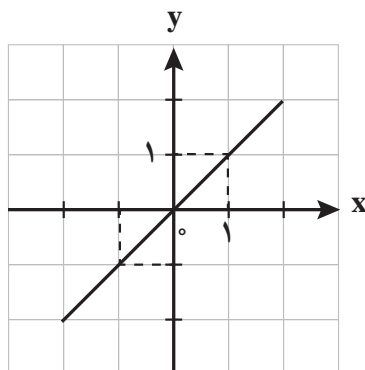




ث)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 1$$

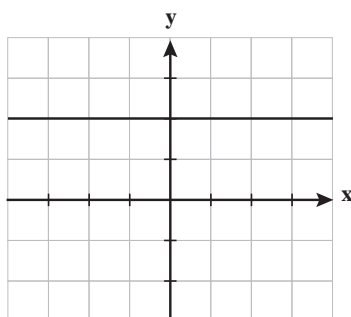
تابع هست.



نیمساز ناحیه اول و سوم ج)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

تابع هست.



ج)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2$$

تابع ثابت است.

۲ بُرد هر یک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف)  $f: A \rightarrow B$

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad A = \{0, -1, 1, 2, -2\}, \quad R_f = \{1, 3, 7\}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 7$$

$$f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1 \quad f(-2) = 3$$

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

حل :

ب)  $f: A \rightarrow B$

حل :

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2 \right\} \quad R_f = \left\{ \circ, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3 \right\} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad f(2) = \frac{3}{2}$$

$$f(1) = 2 \quad f(-1) = \circ \quad f(-2) = \frac{1}{2}$$

پ)  $f: A \rightarrow B$

حل :

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad A = \{\circ, 1, 2, 3, 4, 8\} \quad R_f = \{1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\} \quad f(\circ) = 1 \quad f(3) = 2$$

$$f(1) = \sqrt{2} \quad f(4) = \sqrt{5}$$

$$f(2) = \sqrt{3} \quad f(8) = 3$$

ت)  $f: A \rightarrow B$

حل :

$$f(x) = x, \quad A = W = \{\circ, 1, 2, 3, \dots\} \quad R_f = W \quad f(\circ) = \circ \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 2 \dots$$

ث)  $f: A \rightarrow B$

حل :

$$f(x) = \circ, \quad A = \mathbb{R} \quad R_f = \{\circ\} \quad \text{برد تابع ثابت تنها یک عضو دارد.}$$

۳ تابع  $f$  به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد.  $f$  کدام تابع است؟ حاصل  $f(3)$  را بیابید.

الف)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ب)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2(x-4)^2$$

$$f(x) = 2^3 \sqrt{x-4}$$

پ)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ت)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^2 - 4$$

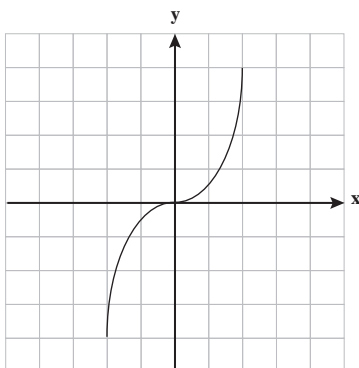
$$f(x) = 2^3 \sqrt{x-4}$$

حل : قسمت پ  $f(x) = 2x^2 - 4$

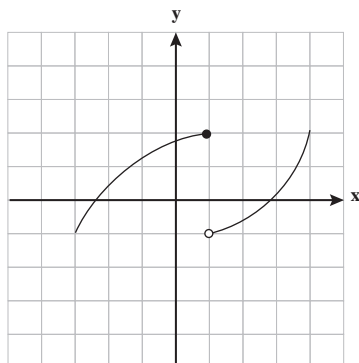
صحیح است.

$$f(3) = 2(27) - 4 = 50$$

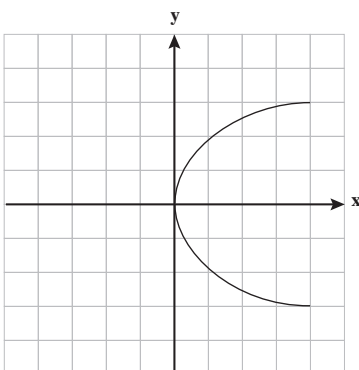
۲ کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



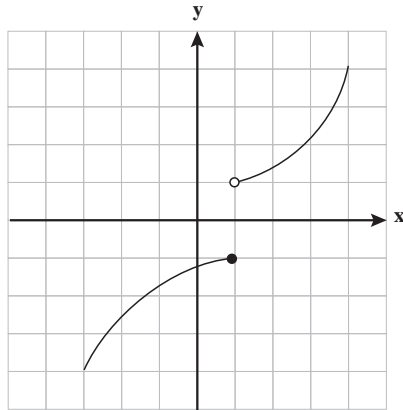
الف) تابع هست زیرا هر خطی موازی محور  $y$ ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



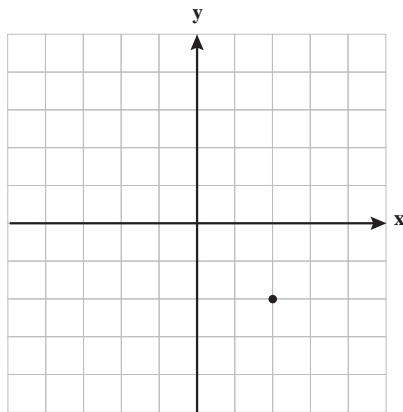
ب) تابع هست.



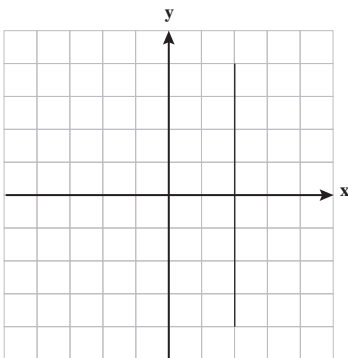
پ) تابع نیست، زیرا خطی وجود دارد که موازی محور  $y$ ها رسم شود و نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.



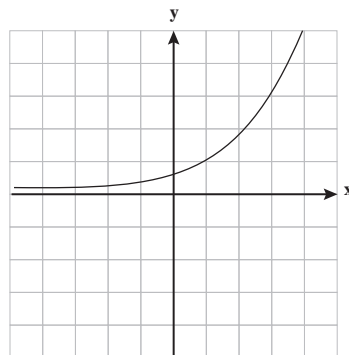
ت) تابع هست.



ث) تابع هست.



ج) تابع نیست.



چ) تابع هست.

# نمودار تابع خطی

درس سوم

## اهداف درس سوم

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

۱. تابع خطی را تشخیص دهند.
۲. نمودار تابع خطی را به کمک ضابطه آن رسم کنند.
۳. پدیده‌های خطی در زندگی روزمره را تشخیص دهند.

## ابزار مورد نیاز

۱. کاغذ شطرنجی
۲. خط‌کش
۳. کامپیوتر

## روش تدریس درس سوم

این درس نیز با رابطه خطی بین دو متغیر شروع شده است. در ورود به مطلب هدف از پرسیدن سؤال تخمین تعداد صندلی‌ها در پایان ساعات کاری مشخص است که نقاطی در یک راستا را مشخص می‌کند. در ادامه در قالب چند فعالیت به معرفی تابع خطی می‌پردازد. در اولین فعالیت صفحه ۷۰ به رابطه بین اندازه وزنه و طول فنر که یک رابطه خطی با شیب  $\frac{1}{3}$  و مقدار ثابت ۵ است اشاره می‌کند. فعالیت صفحه ۷۲ رابطه خطی بین زمان تولید و میزان تولید لوله را مشخص می‌کند. هدف کار در کلاس صفحه ۷۳ یادآوری تعیین شیب خط با داشتن دو نقطه و نوشتن معادله خط و سپس رسم تابع خطی است.

در کار در کلاس صفحه ۷۳ رابطه بین عمق و دمای سنگ را به صورت یک تابع خطی نمایش می‌دهد و در واقع به کاربرد تابع خطی در طبیعت اطراف اشاره دارد. کار در کلاس صفحه ۷۴ به مدل رشد خطی برای تعیین جمعیت اشاره دارد و با طرح یک مثال دانش‌آموزان را با تخمین زدن و کسب اطلاعات از روی نمودار آشنا می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۷۵ به خطی بودن تابع محیط مستطیل‌هایی که اختلاف طول و عرض آن مقدار ثابت است نسبت به یکی از اضلاع آن اشاره دارد و به غیرخطی بودن تابع مساحت مستطیل نسبت به عرض آن با طرح یک سؤال اشاره می‌کند.

در دومین کار در کلاس همین صفحه هدف بررسی ضابطه و رسم نمودار توابع خطی است که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند. (به فرم  $y=ax$ )

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ غالباً دانش‌آموزان در رسم نمودار توابع خطی با دامنه محدود، نقاط را به هم وصل می‌کنند.
- ۲ در مسائلی که قسمت معلوم مسئله  $y$  است به آن بی‌توجه بوده و مقدار آن را به جای  $x$  قرار می‌دهند.

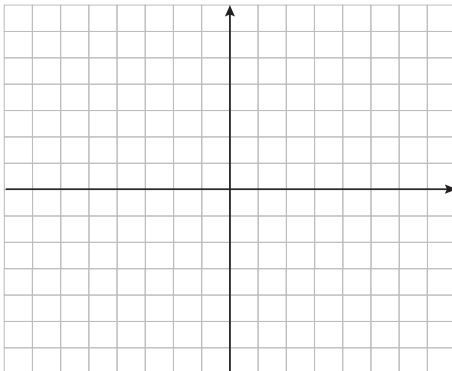
### کار در کلاس

ضابطه تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، برحسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

— آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

### کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی  $f$  از مبدأ عبور کرده و  $f(-1)=2$  باشد، نمودار و ضابطه تابع  $f$  را مشخص کنید.



### حل تمرین‌های درس سوم

۱) مقادیر  $m$  و  $n$  را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه  $f(x) = mx + n$  داشته باشیم:  $f(1) = 1$  و  $f(2) = 4$ .

حل:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ 2m + n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = 3 \\ n = -2 \end{matrix}$$

۲) ضابطه تابع خطی  $f$  را که از نقاط  $(2, 3)$  و  $(4, 1)$  می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

حل:

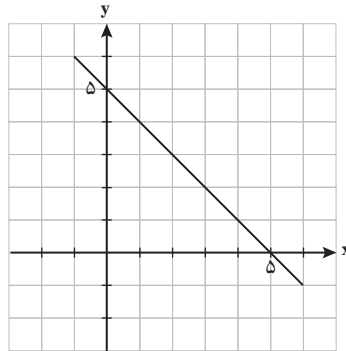
$$\begin{aligned} f(4) &= 1 \\ y &= -x + n \Rightarrow 1 = -4 + n \Rightarrow n = 5 \\ m &= \frac{3-1}{2-4} = -1 \\ f(x) &= -x + 5 \end{aligned}$$

۳) در تابع خطی  $f$  داریم  $f(1) = 5$  و  $f(2) = 8$ ، مقادیر  $f(-3)$  و  $f(5)$  را بیابید.

حل:

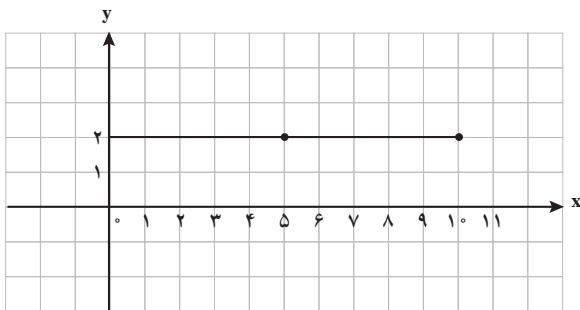
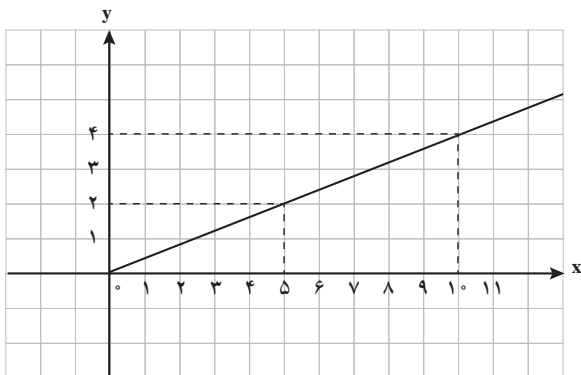
$$m = \frac{8-5}{2-1} = 3$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 5 \\ f(x) &= 3x + n \Rightarrow 5 = 3 + n \Rightarrow n = 2 \\ f(x) &= 3x + 2 \\ f(-3) &= 3(-3) + 2 = -7 \\ f(5) &= 3(5) + 2 = 17 \end{aligned}$$



۴) نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  باشد و از نقطه  $A \left( \frac{1}{2}, 5 \right)$  بگذرد.

حل: جواب سؤال منحصر به فرد نیست.



۵ نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و  $f(2)=7$  است. در این صورت اختلاف  $f(0/1)$  و  $f(-0/1)$  را به دست آورید.

$$f(0)=0, \quad f(2)=7 \quad m=\frac{7}{2}, \quad f(x)=\frac{7}{2}x$$

حل :

$$f(0/1)=3/5 \times 0/1 = 0/35$$

$$f(-0/1)=3/5 \times -0/1 = -0/35$$

۶ رابطه بین درجه دما برحسب سانتی گراد و فارنهایت به صورت  $F = \frac{9}{5}C + 32$  است. دمای یک

جسم  $20^\circ$  درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

$$f(20) = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 68$$

$$\text{حل : } 68 - 32 = 36$$

$$f(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 32$$



۷ یک شرکت برای تولید  $x$  کالا،  $C(x) = 3000 + 50x$  تومان هزینه می کند و هر کالا را ۷۰ تومان می فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟  
حل:

الف)  $Rf(x) = 70x$

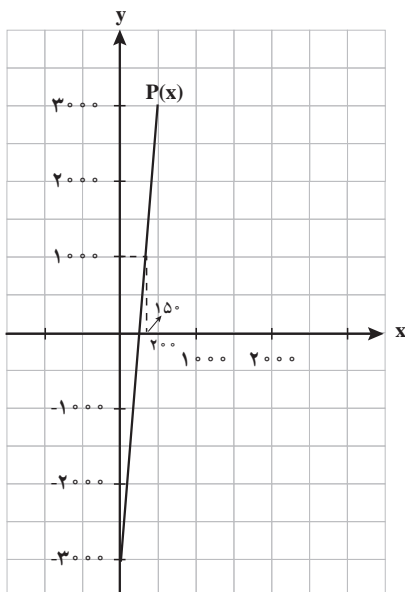
$$P(x) - R(x) - C(x) = 20x - 3000$$

$x$	۲۰۰	۳۰۰
$P(x)$	۱۰۰۰	۳۰۰۰

ب)  $20x - 3000 > 0$

$$x > 150$$

حداقل باید ۱۵۱ کالا بفروشد.



## نمودار تابع درجه ۲

درس چهارم

### اهداف درس چهارم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

۱. تابع درجه دوم را تشخیص دهند.
۲. نمودار تابع درجه دوم را به کمک نقطه‌یابی رسم کنند.
۳. نمودار تابع درجه دوم را با داشتن رأس و نقاط کمکی طرفین رسم کنند.
۴. در حل مسائل کاربردی مرتبط تابع درجه دوم را تشکیل دهند.

### ابزار مورد نیاز

۱. خط‌کش
۲. صفحه شطرنجی
۳. کامپیوتر

### روش تدریس درس چهارم

ورود به مطلب با یک فعالیت آغاز می‌شود. دانش‌آموزان با تکمیل جدول مختصات نقاطی از تابع مساحت مستطیل‌هایی با محیط ثابت را مشخص کرده و با رسم آنها در یک صفحه محورهای مختصات به صورت سهمی، به غیر خطی بودن تابع مساحت پی برده و با توابع غیر خطی آشنا می‌گردند.

## فعالیت صفحه ۷۸

مسئله‌ای از دنیای واقعی مطرح گردیده که طی آن دانش‌آموزان با تابع هزینه، تابع درآمد و تابع سود آشنا می‌گردند.

## هدف فعالیت صفحه ۸۰

رسم نمودار تابع درجه دوم است که با ساده‌ترین نوع تابع درجه دوم  $f(x) = x^2$  شروع شده است. به کمک جدول مختصات نقاطی از سهمی و از جمله رأس سهمی مشخص شده و با مشخص کردن نقاط در صفحه محورهای مختصات، سهمی را رسم می‌کنند. توجه دانش‌آموزان را به بالا بودن دهانه سهمی معطوف می‌کنیم.

## کار در کلاس صفحه ۸۱

با همان هدف فعالیت بالا نوشته شده با این تفاوت که دهانه سهمی رو به پایین و رأس سهمی روی محور  $y$ ها قرار می‌گیرد. ( $C = 4$ )

## هدف کار در کلاس صفحه ۸۱

تعیین مختصات رأس سهمی به کمک ضابطه تابع بوده است بدون اینکه نمودار سهمی رسم شود. همچنین می‌توان در این تمرین به نقاط ماکزیمم و مینیمم و معادله خط تقارن سهمی اشاره‌ای داشته باشیم.

## کار در کلاس صفحه ۲

با هدف آشنایی دانش‌آموزان با سهمی‌هایی که دهانه آنها بازتر یا تنگ‌تر است، طراحی گردیده است. در قسمت الف ضریب درجه دوم عددی بزرگ‌تر از واحد و دهانه سهمی تنگ‌تر و در قسمت ب ضریب درجه دوم کوچک‌تر از واحد و دهانه سهمی بازتر است.

## هدف کار در کلاس صفحه ۸۳

تبدیل معادله سهمی از حالت غیر استاندارد  $y = ax^2 + bx + c$  به حالت استاندارد و تبدیل به مربع کامل است. بدیهی است می‌توان این سهمی‌ها را با مشخص کردن مختصات رأس سهمی  $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$  و تعیین دو نقطه در طرفین رأس، رسم کرد.

## اشتباهات رایج دانش آموزان

– معمولاً دانش آموزان پس از مشخص نمودن مختصات نقاط سهمی به جای رسم منحنی یک خط شکسته رسم می کنند!

## توصیه های آموزشی

۱ در بررسی فعالیت اول این درس می توان دانش آموزان را به کشف نکته زیر تشویق کرد : اگر مجموع دو کمیت عدد ثابتی باشد ( $x + y = ۱۰$ )، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که دو کمیت برابر باشند. این مطلب به کمک جدول کاملاً روشن است.

۲  $x = \frac{-b}{2a}$  معادله محور تقارن سهمی و طول رأس سهمی است. در سهمی های غیر استاندارد می توان به جای تبدیل به مربع کامل و صورت استاندارد سهمی، مختصات رأس سهمی را با این فرمول تعیین نمود.

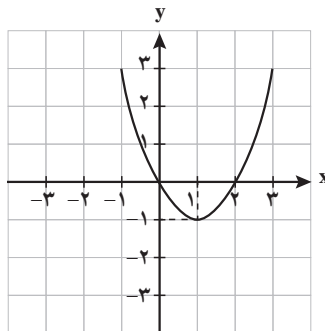
$(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$

## حل تمرین های درس چهارم

۱ نمودار سهمی های به معادلات  $y = x^2 - 2x$  و  $y = -(x-1)^2 + 1$  و  $y = x^2 + 4x + 1$  را رسم کنید.

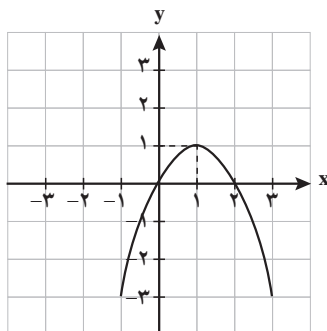
الف)  $y = (x-1)^2 - 1$

$x$	۰	۱	۲
$y$	۰	-۱	۰



ب)  $y = -(x-1)^2 + 1$

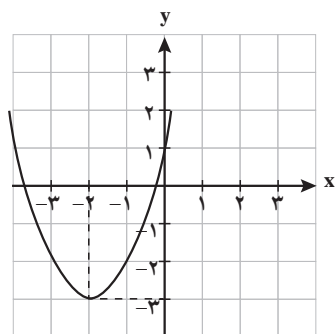
x	۰	۱	۲
y	۰	۱	۰



پ)  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

$f(-2) = -3$

x	-3	-2	-1
y	-2	-3	-2



۲ اگر تابع درآمد به صورت  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$  و تابع هزینه به صورت  $y = 18x + 40$  باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.

$P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 12x - 40$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{2})} = 12$

$P(12) = 32$  : حل

۳ محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با  $x$  و مساحت آن را با  $S$  نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب  $x$  رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از  $x$  مساحت مستطیل ماکسیمم می شود.

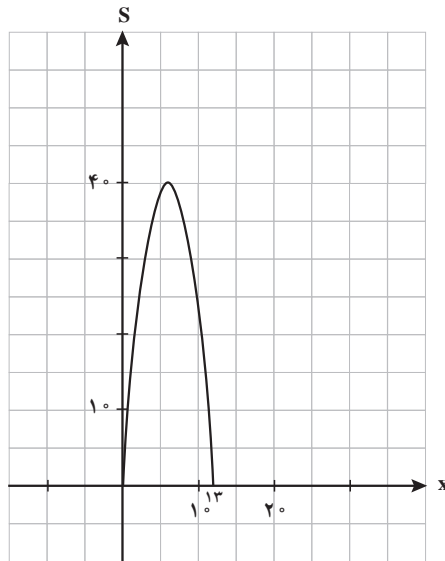
$$2(x + y) = 26 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow S = xy = x(13 - x) = 13x - x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-13}{-2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$f\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{169}{4} = 42.25$$

$x$	6	6.5	7
$P(x)$	42	42.25	42

$$x = 6.5$$



۴ اگر  $a + 2x = 100$  باشد،  $x$  و  $a$  را طوری بیابید که  $y = xa$  ماکسیمم شود.

$$a = 100 - 2x$$

$$y = xa = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 25$$

$$a = 100 - 2(25) = 50$$

۵ در یک تولیدی نوعی لامپ برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز  $x$  واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر  $c(x) = x^2 + 40x + 100$  باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

$$R(x) = 200x \quad \text{الف)}$$

$$P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

$$\text{ب) } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} = 80$$

$$\text{پ) } P(80) = 6300$$





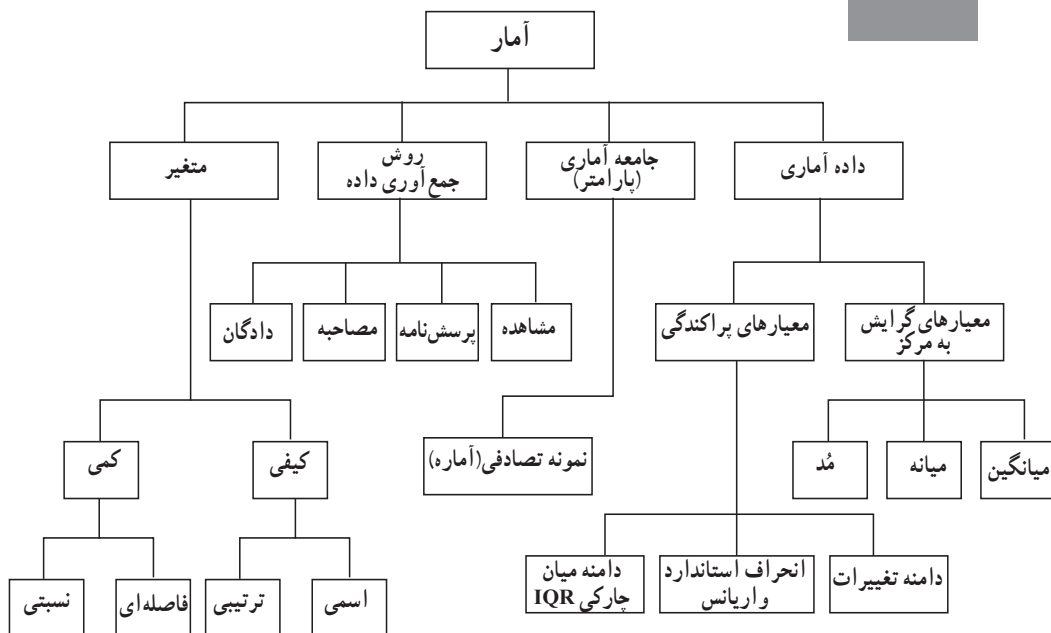
## فصل ۴

# کار با داده‌های آماری

## نگاه کلی به فصل

در این فصل کتاب، دانش‌آموزان با علم آمار و مفاهیمی که در آن به کار می‌رود آشنا می‌شوند. درس اول از این فصل به معرفی داده، جامعه آماری، نمونه تصادفی می‌پردازد و مفاهیم آمارگیری و آمارگر را بیان می‌کند. سپس به انواع روش‌های گردآوری داده‌ها (مشاهده، پرسش‌نامه، مصاحبه، دادگان) و تفاوت‌ها و کاربرد آنها می‌پردازد. در این درس متغیرها (کمی و کیفی) و انواع آن (اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای، نسبتی)، که در واقع ویژگی‌های داده آماری است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در نهایت تعریفی از علم آمار آورده می‌شود. در درس دوم معیارهای گرایش به مرکز (میانگین، میانه) معرفی می‌شوند و کاربرد آنها و مصداق‌هایی برایشان گذاشته شده است. همچنین داده دور افتاده و تأثیر آن بر این دو گرایش مورد بررسی قرار می‌گیرد. مُد نیز در حاشیه این درس برای دانش‌آموزان معرفی می‌شود. در درس سوم، بررسی معیارهای پراکندگی (انحراف استاندارد – واریانس) صورت می‌گیرد و محاسبه این مقادیر با مثال صورت می‌گیرد. همچنین روی مقدار انحراف استاندارد از میانگین (دو برابر، یک برابر، سه برابر) بحث شده و کاربرد آن مطرح می‌شود. در ادامه این درس چارک‌ها و دامنه میان‌چارکی و دلیل استفاده آن بیان می‌گردد. تمام مجموعه مطالب این فصل آمار توصیفی را معرفی می‌کند.

## نقشه مفهومی



## دانشتنی‌هایی برای معلم

آمار در روزگاران کهن غالباً به معنای جمع‌آوری اطلاعات مربوط به جمعیت به کار می‌رفت و در حقیقت کلمه Statistics از State به معنی «کشور» و «ایالت» گرفته شده و آمار جمعیت اغلب به منظور وصول مالیات یا برای مقاصد نظامی جمع‌آوری می‌شده است ولی در حال حاضر تقریباً در تمام علوم و تمامی زمینه‌های فعالیت‌ها، که نیاز به اثبات ادعا و طبقه‌بندی اطلاعات مبتنی بر شواهد تجربی باشد، علم آمار حضور دارد و ما را در حل مسائل زندگی و برداشت صحیح از زندگی و جهان یاری می‌کند. درواقع آمار، واقعیت‌های ابزار کشف، شاخه‌ای از ریاضی، روشی برای علوم تربیتی، بخشی از علوم حیاتی، وسیله‌ای برای منابع اقتصادی و ... و ابزاری است از مدیریت صحیح. و می‌توان گفت آمار عبارت است از «علم جمع‌آوری، تنظیم، تلخیص و تجزیه و تحلیل داده‌ها و استخراج تصمیم‌های منطقی در مورد پدیده‌های تحت بررسی».

در تاریخ، چینی‌ها، چندین هزار سال قبل از تولد مسیح، تعداد نفری را برآورد کردند و مصریان نیز علاوه بر سرشماری نفوس جدول تحرک جمعیت را نیز تشکیل داده بودند. در ایران تاریخ ورود به علم آمار مشخص نیست اما در شاهنامه فردوسی، در یکی از جنگ‌ها، گئو به پسرش دستور می‌دهد که تعداد افراد لشکر دشمن را بگوید. پسر گئو با توجه به اینکه نمی‌توانست به لشکر دشمن نزدیک شود با توجه به تعداد علم‌های موجود در لشکر دشمن (مشاهده از دور) برآورد مناسبی از تعداد افراد به عمل آورد. جمع‌آوری آمارهای اداری بیش از دو هزار سال سابقه دارد. در قرن هفدهم آمار حیاتی توسط «جان گرافت» انگلیسی پایه‌گذاری شد و او را پدر علم آمار حیاتی می‌دانند. نظریه آمار از نیمه قرن هفدهم با وارد شدن نظریه احتمال و مسائل بازی‌های شانسی توسعه می‌یابد. امروز «رونالد فیشر» انگلیسی را به عنوان پدر علم آمار می‌شناسند. وی آمار را در زمینه‌های مختلف مانند ژنتیک، بیومتری، آموزش و پرورش، کشاورزی و ... وارد کرد و در معرفی استنباط آماری شامل برآوردهای نقطه‌ای، توزیع دقیق نمونه و طرح آزمایش‌ها پیشگام بود. به کارگیری روش‌های آماری در علوم اجتماعی و رفتاری کمی قبل از جنگ جهانی دوم شروع شد. امروز موفقیت در بسیاری از زمینه‌های علمی مانند علوم انسانی، پزشکی و فنی و مهندسی بدون داشتن اطلاعات لازم از علم آمار مشکل و گاهی غیر ممکن است.

طبقه‌بندی، خلاصه کردن، توصیف و تفسیر اطلاعات جمع‌آوری شده و برقراری ارتباط از طریق آنها را «آمار توصیفی» می‌نامند و با استفاده از اطلاعات جمع‌آوری شده از نمونه کوچکی از آزمودنی‌ها، ویژگی‌های جامعه‌ای را که نمونه از آن انتخاب شده است برآورد یا استنباط کنند را «آمار استنباطی» می‌گویند.

«جامعه» عبارت است از گروهی از افراد، اشیا یا حوادث که حداقل دارای یک صفت یا ویژگی مشترک باشند. فرض کنید علاقه‌مند هستید «متوسط قد دانش‌آموزان پسر مدارس متوسطه اول را در شهر تهران»

برآورد کنید، در این برآورد، جامعه عبارت است از تمامی دانش‌آموزانی که در مدارس متوسطه اول شهر تهران مشغول به تحصیل هستند و ویژگی مشترک در این جامعه عبارت است از تحصیل در مدرسه متوسطه اول و پسر بودن. محاسبه چنین اندازه‌ای (متوسط قد) برای جامعه، «پارامتر» جامعه نامیده می‌شود. بنابراین «پارامتر» عبارت است از ویژگی عددی یک جامعه.

«نمونه» چون حجم یا اندازه جامعه‌های تحقیقی بسیار بزرگ است و اندازه‌گیری ویژگی مورد پژوهش برای تک تک افراد جامعه غیر ممکن است و یا به هزینه و وقت زیادی نیاز دارد کافی است تا نمونه‌ای از جامعه انتخاب و اندازه‌گیری شود و براساس یافته‌های حاصل از نمونه، این نتایج را به کل جامعه تعمیم داد. بنابراین نمونه عبارت است از زیرجامعه‌ای که از کل جامعه انتخاب می‌شود و معرف آن جامعه است. اندازه‌ای که از نمونه به دست می‌آید «آماره» نامیده می‌شود پس «آماره» عبارت است از ویژگی یا ویژگی‌هایی کمی که یک نمونه را توصیف می‌کند.

بررسی‌های آماری روی صفات مشخصه انجام نمی‌شود زیرا افراد جامعه نسبت به این صفات هیچ وجه تمایزی با هم ندارند. اگر به افراد جامعه از زاویه‌های دیگر بنگریم تفاوت‌های زیادی می‌بینیم آن صفات را که عامل این تفاوت‌ها هستند «متغیر» می‌نامند. به عنوان مثال، در جامعه دانش‌آموزان پسر مدارس متوسطه اول شهر تهران، وزن، قد، هوش، نوع بیماری، گروه خونی و... دانش‌آموزان متغیر می‌باشند. متغیرها به دو دسته کیفی و کمی تقسیم می‌شوند :

### الف) متغیر کیفی

مربوط به صفاتی است که واحد نداشته و قابل اندازه‌گیری نیستند، مانند جنس، مرغوبیت، شغل، نوع بیماری، وضع تأهل، رنگ چشم، گروه خونی و نظایر اینها.

### ب) متغیر کمی

مربوط به صفاتی هستند که قابل اندازه‌گیری یا شمارش هستند؛ یعنی واحد اندازه‌گیری یا شمارش دارند و قابل مقایسه و سنجش می‌باشند مانند سن، طول عمر، معدل، وزن، قد، درآمد و نظایر اینها. متغیرها و رابطه بین آنها را می‌توان از طریق اندازه‌گیری دقیق‌تر توصیف کرد. اندازه‌گیری عبارت است از اختصاص دادن عدد به یک صفت یا ویژگی براساس قاعده یا قانون. برای متغیر کیفی دو مقیاس اندازه‌گیری :

۱ اسمی

۲ ترتیبی؛ معرفی می‌شود.

## مقیاس اسمی

مشاهدات را طبقه‌بندی می‌کند، اعدادی که در این مقیاس به کار برده می‌شوند، فقط به صفت مورد اندازه‌گیری، نام یا اسم می‌دهند مانند گروه خونی، یا وضعیت تأهل.

## مقیاس ترتیبی

علاوه بر نام‌گذاری، طبقه‌بندی و مشاهده، آن را براساس یک ملاک معین رتبه‌بندی می‌کنند (مانند نفر اول و دوم و سوم شدن در مسابقات). اعداد به کار برده شده در این مقیاس ترتیب یا رتبه اشیا را مشخص می‌کنند. توجه شود فاصله مساوی بین اعداد در این مقیاس به معنی فاصله‌های مساوی بین صفات یا مشاهده‌ها نیست. برای متغیر کمی دو مقیاس اندازه‌گیری:

۱ فاصله‌ای

۲ نسبتی؛

معرفی می‌شود.

## مقیاس فاصله‌ای

ویژگی مقیاس‌های اسمی و ترتیبی را داراست و علاوه بر آن در این مقیاس فاصله‌ها بین ویژگی‌های مورد اندازه‌گیری مساوی است و می‌توان اختلاف بین مشاهدات را تعیین کرد (توجه: اعمال ضرب و تقسیم در اینجا وجود ندارد) مانند درجه حرارت بر حسب سلسیوس که اختلاف درجه دما یا حرارت بین دو شهر قابل محاسبه و بامعناست اما ضرب این دو درجه دما معنی ندارد.

## مقیاس نسبتی

علاوه بر ویژگی‌های مقیاس فاصله‌ای و اسمی و ترتیبی، دارای صفر مطلق نیز هست و در بالاترین سطح اندازه‌گیری قرار دارد مانند کیلوگرم، متر، گرم که دارای صفر واقعی (صفر مطلق) می‌باشند. «شاخص‌های گرانش به مرکز»، عدد واحدی است که به وسیله آن، مجموعه‌ای از داده‌ها را مشخص می‌کند به گونه‌ای که معرف تمام مجموعه داده‌ها باشد.

«میانگین» متداول‌ترین گرانش به مرکز است و در واقع از جمع داده‌های (مقیاس اندازه‌گیری شده فاصله‌ای یا نسبتی) تقسیم بر تعداد آنها به دست می‌آید یعنی میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر است

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ویژگی‌های میانگین عبارت‌اند از :

- ۱ یک شاخص فاصله‌ای است.
  - ۲ در محاسبه آن عملیات ریاضی بیشتری استفاده می‌شود.
  - ۳ در محاسبه آن از همه اعداد یا داده‌ها استفاده می‌شود.
  - ۴ داده‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک در آن تأثیر دارد.
  - ۵ مجموع انحراف از میانگین همیشه صفر است یعنی  $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$ .
  - ۶ با ثبات‌ترین شاخص، گرایش به مرکز است.
  - ۷ بهترین برآورد از میانگین جامعه است.
  - ۸ اگر میانگین داده‌های  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  برابر  $\bar{x}$  باشد، میانگین داده‌های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر است با  $\bar{y} = a\bar{x} + b$ .
- «میان» شاخص دیگری از گرایش به مرکز است که در واقع نقطه وسط در توزیع داده‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر میان نقطه‌ای است که نیمی (۵۰٪) داده‌ها در بالای آن (بیشتر) و نیم دیگر (۵۰٪) در پایین آن (کمتر) قرار دارد. برای تعیین میانه ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب کرده سپس دو حالت داریم اگر تعداد داده‌ها فرد باشد در این صورت داده مرتبه  $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$  جزء صحیح  $\left(\frac{n}{2}\right)$ ، میانه داده‌ها و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد در این صورت میانگین داده‌های مرتبه  $\left(\frac{n}{2}\right)$  و  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ ، میانه داده‌های فوق می‌باشد.

ویژگی‌های میانه عبارت‌اند از :

- ۱ یک شاخص ترتیبی است.
- ۲ مقدار آن به وسیله عددی که در وسط توزیع قرار دارد، تعیین می‌شود.
- ۳ تحت تأثیر ارزش عددی تمام داده‌ها قرار ندارد.
- ۴ به اغلب داده‌های توزیع نزدیک است.
- ۵ در محاسبه آن از عملیات ریاضی کمتری استفاده می‌شود.
- ۶ ثبات آن از میانگین کمتر و از مد بیشتر است.
- ۷ با مقیاس‌های ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی به کار برده می‌شود.

«مد» عبارت است از داده‌ای که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشد. ویژگی‌های مد عبارت‌اند از:

- ۱ یک شاخص اسمی است.
- ۲ عددی است که دارای بیشترین فراوانی است.
- ۳ اغلب در وسط توزیع داده‌ها قرار دارد.
- ۴ اعمال ریاضی را نمی‌توان با آن انجام داد.
- ۵ در بعضی از توزیع‌ها بیش از یکی وجود دارد.
- ۶ دارای پایداری یا ثبات خیلی کمی است.
- ۷ برآورد خیلی ضعیفی از پارامتر جامعه است.
- ۸ به‌ندرت به کار برده می‌شود.

«شاخص‌های پراکندگی»، میزان پراکندگی یا تغییراتی که در بین داده‌های یک توزیع وجود دارد را نشان می‌دهند و برای توصیف پراکندگی داده‌ها که به‌صورت کمتی مطرح می‌شوند ضروری هستند. «دامنه تغییرات» اولین شاخص پراکندگی است که در واقع اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده می‌باشد. «انحراف استاندارد» معیار دیگری از شاخص پراکندگی است که از قانون زیر پیروی می‌کند. اگر  $(x_1 \dots x_n)$  داده‌ها باشند در این صورت انحراف استاندارد برابر است با:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}$$

«واریانس» توان دوم انحراف استاندارد می‌باشد. و اگر داده‌ها به‌صورت  $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$  باشد در این صورت انحراف استاندارد برابر است با:

$$S_y = aS_x$$

«انحراف چارکی» در واقع  $IQR = Q_3 - Q_1$  می‌باشد که در آن  $Q$  چارک اول داده‌ای است که بعد از مرتب شدن آنها به‌صورت صعودی  $\frac{1}{4}$  داده‌ها (۲۵٪) کمتر از آن و  $\frac{3}{4}$  (۷۵٪) داده‌ها بیشتر از آن قرار دارند و  $Q_3$  چارک سوم که  $\frac{3}{4}$  داده‌ها (۷۵٪) کمتر از آن و  $\frac{1}{4}$  داده‌ها (۲۵٪) بیشتر از آن قرار دارند.

## گردآوری داده‌ها

### درس اول

### اهداف درس اول

- در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :
- ۱ درک دقیق از مفهوم داده و واحد آماری داشته باشند.
  - ۲ جامعه آماری را درک کنند و برای آن مصداق پیدا کنند.
  - ۳ نمونه تصادفی را توصیف کنند و مثال‌هایی برای آن بیان کنند.
  - ۴ انواع روش‌های گردآوری داده‌ها (مشاهده، پرسش‌نامه، مصاحبه، دادگان) را درک کرده و برای هر یک مثالی بیاورند.
  - ۵ درک دقیق از «پارامتر» و «آماره» داشته باشند و تفاوت آنها را تشخیص دهند.
  - ۶ مفهوم متغیر را درک کنند و تفاوت آن را با داده بیان کنند.
  - ۷ انواع متغیرها را بشناسند و تفاوت‌های آنها را درک کنند.
  - ۸ برای «آمار» بیان توصیفی شفافی بیاورند.

### روش تدریس درس اول

هدف فعالیت اول این درس درک مفاهیم «داده»، «واحد آماری» جامعه آماری و نمونه تصادفی است و اینکه احساس نیاز را در دانش‌آموز تقویت کند که در بسیاری از مسائل استفاده از نمونه تصادفی به جای جامعه آماری، مناسب‌تر است. همچنین ارتباط و تفاوت این دو (نمونه تصادفی و جامعه آماری) در انتهای این فعالیت مطرح شده و به دانش‌آموز تأکید می‌کند که «اگر نمونه تصادفی» انتخاب شود، آنگاه نمونه معرف جامعه خواهد بود.



در فعالیت صفحه ۸۸ گردآوری داده‌ها، مشاهده و پرسش‌نامه معرفی شده و مثالی از طریق ثبت مشاهدات و همچنین مثالی از یک پرسش‌نامه آورده شده است. در انتهای این فعالیت نکاتی را برای به انجام رسیدن یک آمارگیری، با پاسخ به چند سؤال مطرح نموده است.

## کار در کلاس صفحه ۹۰

ابتدا با پرسشی دانش‌آموزان را به این چالش می‌کشد که آیا به جز دو روش مشاهده و پرسش‌نامه، روش‌های دیگری برای آمارگیری وجود دارد؟ و در ادامه چهار روش گردآوری داده‌ها، مشاهده، پرسش‌نامه، مصاحبه و دادگان توضیح داده شده است.

## تمرین صفحه ۹۱

مروری بر روش‌های جمع‌آوری داده‌هاست و کار در کلاس صفحه ۹۲ جهت تقویت بیشتر دانش‌آموزان از درک و استفاده روش‌های گردآوری داده‌ها در شرایط مختلف، آورده شده است.

## فعالیت صفحه ۹۲

با بیان مثالی از افرادی که از کوه دنا بالا می‌روند، متغیرهای متفاوت بسته به نوع پژوهش معرفی شده و در ادامه «پارامتر» و آماره بیان و روی آن بحث شده است. مثال «ارزیابی» هندوانه‌های آماده برداشت خوزستان از دو جهت «وزن» و «مزه» آنها، برای درک بهتر دانش‌آموزان از متغیرهای کمی و کیفی و پارامتر و آماره آورده شده است. این مثال به خوبی مشکلات سرشماری را بیان کرده و همچنین تفاوت آماره و پارامتر را مطرح کرده است.

در حاشیه صفحه ۹۳ نیز محدودیت‌های سرشماری عنوان شده است.

با قرار دادن کار در کلاس صفحه ۹۴، مفاهیم داده‌ها، متغیر و انواع آن، نمونه تصادفی، جامعه آماری، پارامتر و آماره با به چالش کشیدن دانش‌آموزان دوباره مرور شده است.

## انواع متغیرها

اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای، نسبی

در این قسمت از کتاب توجه بیشتری جهت درک عمیق آن می‌طلبد. در واقع با نگاهی تخصصی‌تر

به متغیرها توجه شده است. متغیرها را به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کرده و هر کدام از این گروه‌ها را با یک مقیاس اندازه‌گیری کرده است. در واقع هدف از بیان متغیرها برحسب مقیاس‌ها تشخیص نوع مناسب داده‌ها می‌باشد نظیر ترتیب و نسبت گرفتن.

بحث اصلی در تشخیص متغیرهای فاصله‌ای و نسبتی است. شاید موضوعی که می‌تواند تشخیص را آسان سازد توجه به صفر مطلق و صفر نسبی است هرچند که در کتاب مطرح نشده است اما عنوان کردن آن سبب گیج‌شدن دانش‌آموز می‌شود. با بیان یک مثال در کلاس می‌توان بدون آنکه به آن اشاره کرد، مطلب را جهت درک بیشتر دانش‌آموزان مطرح نمود، به عنوان مثال شما می‌توانید شلوغی کلاس را در نظر بگیرید و لحظاتی یک بازی را انجام دهید!! با عصبانیت ساختگی از شلوغی کلاس تهدید کنید که برای دانش‌آموزان خاطی و شلوغ کار نمرهٔ صفر قرار می‌دهید. بعد از اینکه جو آرام شد مطرح کنید که این صفری که بیان کردید دلیل بر بی‌انضباطی کامل شما نیست برای بعضی دانش‌آموزان دو نمره کم می‌کنید و برای دیگری ۵ نمره، این اعداد که بر شلوغ‌کاری شما تعلق گرفت یک مقیاس فاصله‌ای است.

توجه کنید که درجه حرارت در کتاب به عنوان مقیاس فاصله‌ای اشاره شده است (بر حسب سلسیوس) اما دما بر حسب کلون جزء مقیاس نسبتی است. سال‌های شمسی، قمری و میلادی نیز مقیاس‌های فاصله‌ای هستند. نمره امتحانی و زمان شروع یک کار نیز مقیاس فاصله‌ای می‌باشند. در انتهای این درس تأکید شده است که «اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده» استفاده می‌کنند.

## کار در کلاس صفحه ۹۵

در راستای تقویت و تثبیت یادگیری متغیرها و انواع آن آورده شده و تمرین این صفحه آن را تکمیل می‌کند.

## آمار چیست؟

در این قسمت به اهمیت استفاده از «علم آمار» اشاره شده است.

### فعالیت صفحه ۹۶

با بیان دو مثال گردآوری اطلاعات و استفاده از روش‌های آماری، که به تصمیم‌گیری در رابطه با مسائلی که با آن مواجه هستیم، یاری می‌دهد، اشاره می‌کند و تأکید دارد که «روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعه کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از این افراد یا اقلام نتیجه‌گیری کنیم.» و بعد از تعریف آمار توجه به این نکته را ضروری می‌داند که «نتایج آماری باید توسط فردی که نه تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.»

### تمرین صفحه ۹۷

مطالب این درس دوره می‌شود.  
در قسمت خواندنی مثال «لقمان و مرد پیاده» تمام اصول آماری رعایت شده و نشان می‌دهد که چگونه توجه به آنها، در تصمیم‌گیری افراد تأثیر دارد.

## معیارهای گرایش مرکزی

درس دوم

### اهداف درس دوم

- در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :
- ۱ مفهوم میانگین که یکی از معیارهای گرایش مرکزی است را درک کنند.
  - ۲ با طریقهٔ به‌دست آوردن میانگین داده‌ها آشنا شوند.
  - ۳ مفهوم میانه معیار دیگر گرایش مرکزی را درک کنند و مصداقی برای آن بیاورند.
  - ۴ طریقه تعیین میانه داده‌ها را تشخیص دهند.
  - ۵ درک دقیقی از داده‌های دور افتاده در داده‌های آماری داشته باشند.
  - ۶ تأثیر داده‌های دور افتاده در میانگین و میانه را درک کنند.
  - ۷ مُد، یکی دیگر از معیارهای گرایش مرکزی را درک و مصداقی برای آن پیدا کنند.
  - ۸ دانش‌آموزان مفهوم میانگین موزون را درک کرده و مصداقی برای آن بیان کنند.

## روش تدریس درس دوم

در فعالیت صفحه ۹۹، با اشاره به یک کار اجتماعی، فرهنگی «خیرین مدرسه» به کاربرد میانگین می‌پردازد و در ادامه عبارت ریاضی محاسبه میانگین (فرمول میانگین) را معرفی می‌کند. در صفحه ۱۰۰ کار در کلاس، میانگین انواع داده‌ها بررسی می‌شود و در قسمت ۷ آن چند قاعده کلی با توجه به قسمت‌های قبلی نتیجه‌گیری می‌شود (نظیر؛ اگر هر داده در عدد ثابتی ضرب (تقسیم) شود میانگین نیز در همان عدد ضرب می‌شود).

در ادامه کار در کلاس، داده دور افتاده با توجه به مثال انجمن خیریه دبیرستان معرفی و تأثیر آن دیده می‌شود.

در حاشیه صفحه ۱۰۰، مُد، معرفی شده و مثال‌هایی برای آن آورده شده است.

**میان:** برای آشنایی و درک دانش‌آموزان با مفهوم میانه، داده‌های مثال خیریه را مرتب کرده و میانه را به‌دست آورده است (در دو حالت تعداد داده‌ها «فرد» و یا «زوج» باشد). تمرین صفحه ۱۰۱ تکمیل‌کننده بحث میانه می‌باشد.

در ادامه با یک مثال مربوط به هزینه‌های جراحی یک بیمارستان، اهمیت و تفاوت میانگین و میانه را مورد بررسی قرار می‌دهد.

با انجام کار در کلاس صفحه ۱۰۲ درک عمیق‌تری از مفاهیم میانگین و میانه و داده دور افتاده برای دانش‌آموزان ایجاد می‌گردد.

در حاشیه صفحه ۱۰۲ میانگین موزون با یک مثال توضیح داده شده است.

## معیارهای پراکندگی

درس سوم

### اهداف درس سوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ با مفهوم انحراف استاندارد ( و واریانس) و دلیل استفاده آن آشنا شوند.
- ۲ نماد ریاضی (فرمول) و طریقه به‌دست آوردن انحراف استاندارد را درک کنند.
- ۳ مفهوم مقدار (دو برابر، یک برابر، سه برابر) انحراف استاندارد از میانگین را درک کنند.
- ۴ با طریقه به‌دست آوردن مقدار انحراف استاندارد از میانگین آشنا شوند.
- ۵ مفاهیم چارک‌ها را درک کرده و با طریقه محاسبه آنها آشنا شوند.
- ۶ با دامنه میان چارکی IQR آشنا شوند.

### روش تدریس درس سوم

#### فعالیت صفحه ۱۰۳

با یک محاسبه میانگین سه دسته داده که مربوط به کلاس دهم است به بررسی این موضوع می‌پردازد که میانگین چند سری داده که مساوی باشند، تصمیم‌گیری روی عملکرد آنها با مشکل مواجه می‌شود. و برای رفع این مشکل نیاز به استفاده از یک معیار دیگر که معیار پراکندگی نامیده می‌شود، می‌باشد. و در ادامه انحراف استاندارد و واریانس، معرفی و فرمول مربوط به آن آورده می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۰۴، که ادامه فعالیت می‌باشد با به‌دست آوردن انحراف استاندارد و واریانس داده‌ها به بررسی پراکندگی این سه داده می‌پردازد و حل این کار در کلاس در صفحه ۱۰۵ به‌طور خلاصه آورده شده است.

در حاشیه صفحه ۱۰۵ منحنی نرمال و پراکندگی در آن عنوان شده است.

### هدف فعالیت صفحه ۱۰۵

ادامه آن در صفحه ۵ به‌دست آوردن مقدار انحراف استاندارد از میانگین به‌صورت یک برابر انحراف استاندارد از میانگین، دو برابر انحراف استاندارد از میانگین و سه برابر انحراف استاندارد از میانگین و ویژگی و کاربرد آن را مطرح می‌کند و این موضوع در کار در کلاس صفحه ۱۰۶ تکمیل می‌شود.

### فعالیت صفحه ۱۰۶

ادامه آن در صفحات بعدی، به بررسی این می‌پردازد که گاهی اوقات انحراف استاندارد با وجود داده دور افتاده، برای تصمیم‌گیری مناسب نیست و برای به‌دست آوردن یک نتیجه مطلوب نیاز به استفاده از معیار پراکندگی دیگری به نام دامنه میان‌چارکی IQR و چارک‌ها داریم و سپس دلیل آن را توضیح داده و اهمیت آن را بیان می‌کند.

با انجام کار در کلاس صفحه ۱۰۸ دانش‌آموز درک عمیق‌تری از معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی به‌دست می‌آورد.

و در نهایت صفحه ۱۰۹ و ۱۱۰ مروری بر مفاهیم این فصل می‌باشد.

## حل تمرین ها

### تمرین صفحه ۹۱

کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱ میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها

پاسخ: پرسش‌نامه: زیرا در این صورت مشتریان به راحتی و بدون نگرانی پاسخ درست را می‌دهند (به صورت کتبی).

۲ سن همه دانش‌آموزان مدرسه برحسب ماه در پایه دهم

پاسخ: استفاده از دادگان، اطلاعات ثبتی دانش‌آموزان و کپی شناسنامه آنان در پرونده مدرسه موجود و دسترسی به آن از هر روش دیگری ساده‌تر است.

۳ تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر

پاسخ: مشاهده، زیرا دسترسی به همه و نگاه داشتن و مصاحبه و پرسش‌نامه دادن وقت‌گیر و مشکل‌ساز می‌باشد.

### تمرین صفحه ۹۵

داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هریک از سؤالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

الف) نام نماینده حسین ایرانی است. (جواب کیفی اسمی)

ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد. (جواب کمی نسبیتی)

پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰، ۱۳۹۴ است. (جواب: کمی فاصله‌ای)

ت) مجموع حقوق این نماینده، در سال گذشته ۶۰۰،۰۰۰،۰۰۰ ریال بوده است (جواب: کمی نسبیتی)

ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های موردنظر:

حمایت کامل، حمایت، بی طرف، مخالف و کاملاً مخالف است. (پاسخ: کیفی ترتیبی)

ج) وضعیت تأهل این نماینده: «متاهل» است. (پاسخ: کیفی اسمی)



چ) می‌گویند این نماینده، در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن حمایت کرده است. (پاسخ: کیفی ترتیبی)

## تمرین صفحه ۹۷

۱) فرق بین داده و متغیر چیست؟

پاسخ: داده‌ها در واقع اطلاعات مربوط به موضوع هستند و متغیر ویژگی مورد بررسی داده‌ها می‌باشد. در مثال، افرادی که کوه دنا را طی می‌کنند، آدم‌ها، داده‌ها هستند و وزن و قد افراد و زمان طی شده به قله متغیر می‌باشند.

۲) داده‌های در سطح اسمی، کمی هستند یا کیفی؟

پاسخ: کیفی

۳) فرق بین آماره و پارامتر چیست؟

پاسخ: مشخصه عددی که برای توصیف جنبه‌های خاص از جامعه به کار می‌رود پارامتر نامیده می‌شود و مشخصه عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه باشد را آماره می‌نامند، بنابراین آماره مربوط به نمونه تصادفی و پارامتر مربوط به جامعه آماری است.

۴) در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متناوب از یک آماره به دست آورد؟

پاسخ: در یک جامعه آماری پارامتر تغییر نمی‌کند و ثابت است اما می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد.

۵) در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاهخوار، سؤال شده است که برای کدام وعده

غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید.

پاسخ: وعده غذایی (ناهار یا شام)

ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟

پاسخ: کیفی

پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟

پاسخ: مشتریان غذاخوری گیاهخواری

۶ موضوعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سؤالات یک امتحان

پاسخ: نسبتی

ب) زمان اولین کلاس

پاسخ: فاصله‌ای

پ) رشته تحصیلی

پاسخ: اسمی

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب

پاسخ: ترتیبی

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

پاسخ: فاصله‌ای

ج) سن دانش‌آموز

پاسخ: نسبتی

### تمرین صفحه ۱۰۱

۱) میانه داده‌های ۱، ۹۹، ۶۸، ۲، ۸۶، ۱۴، ۱۰، ۱ چقدر است؟

پاسخ: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ، مرتب کرده سپس داده وسط را به دست می‌آوریم.

۱، ۲، ۱۰، ۱۴، ۶۸، ۸۶، ۹۹

میانه این داده‌ها عدد ۱۴ می‌باشد.

۲) میانه داده‌های ۱، ۹۹، ۶۸، ۲، ۸۶، ۱۴، ۱۰، ۱۱ چقدر است؟

پاسخ: بعد از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ چون تعداد آنها ۸ است، بنابراین برای تعیین میانه

بین داده شماره چهارم و پنجم قرار می‌گیرد. سپس میانگین این دو داده را به دست می‌آوریم.

۱، ۲، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۶۸، ۸۶، ۹۹

$$\frac{11+14}{2} = 12.5$$

میانه این داده‌ها عدد ۱۲/۵ است.

## تمرین صفحه ۱۰۹

۱ یک نمونه ۲ تایی از بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه، حتماً تصادفی باشد چه راهی پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی تکراری نباشند چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

پاسخ: با پرتاب یک تاس سالم در دو مرحله و نوشتن اعداد نمونه به دست می‌آید و یا می‌توان اعداد ۱ تا ۶ را روی شش کارت یکسان نوشته و دو کارت را بدون جایگزینی انتخاب کرد. در این حالت نمونه تصادفی تکراری نخواهد شد (به جای کارت می‌توان از شش گوی نیز استفاده کرد).

۲ سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید).

پاسخ: اعداد ۱ تا ۳۶ را روی کارت‌های جداگانه نوشته و از بین آنها دوتا را بدون جایگزینی برداریم اعداد تکراری نخواهند بود.

۳ مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره گذاری کنید سپس یک نمونه ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید.

پاسخ: پس از لیست کردن اسامی فامیل و شماره دادن به آنها، شماره‌ها را روی گوی یا کاغذ نوشته و بدون جایگذاری ۴ تا از آنها را انتخاب می‌کنیم.

— موضوع‌های زیر را در نظر بگیرید. دربارهٔ بهترین روش جمع‌آوری داده برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:

الف) بیشتر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در اتوبان‌ها باید تعیین شود».

پاسخ: پرسش‌نامه

ب) آبی رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.

پاسخ: مصاحبه

پ) در زمان مطالعه، گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می‌کند.

پاسخ: پرسش‌نامه

ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال موجب می‌شوند.

پاسخ: دادگان

ث) رژیم گرفتن، موجب کاهش هوش می‌شود.

پاسخ: دادگان یا پرسش‌نامه

۴ دو موضوع برای هریک از روش‌های جمع‌آوری داده، بیان کنید.

الف) از طریق مصاحبه

پاسخ:

۱ برنامه تلویزیونی مورد علاقه دانش‌آموزان

۲ تعداد افراد خانواده ساکن در خانه‌های یک آپارتمان

ب) از طریق مشاهده

پاسخ:

۱ چه تعداد افراد در یک روز از پل عابر پیاده در یک خیابان استفاده می‌کنند.

۲ چه تعداد از کودکان وارد شده به یک پارک در یک روز از وسایل بازی استفاده می‌کنند.

پ) از طریق دادگان

پاسخ:

۱ مقایسه پیشرفت نمرات دانش‌آموزان در دو ترم سال

۲ میزان بارندگی در مازندران در ماه‌های فصل بهار

ث) از طریق پرسش‌نامه

پاسخ:

۱ دانش‌آموزان اوقات فراغت را چگونه می‌گذرانند؟

۲ زمان برگزاری آزمون صبح بهتر است یا بعد از ظهر؟

۳ کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است؟ در هریک واحدهای آماری، جامعه

و نمونه را مشخص کنید.

الف) با تمام پلیس‌های یک پاسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر پلیس‌های این پاسگاه راجع به تخلفات

مصاحبه شد.

پاسخ: جامعه: پلیس‌های این پاسگاه می‌باشد و این کار چون با تمام آنها مصاحبه شده نمونه‌گیری

تصادفی نیست و سرشماری است.

ب) با بچه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی موردعلاقه

کودکان را مورد بررسی قرار دهیم.

پاسخ: جامعه: کودکانی که وارد پارک بازی می‌شوند. نمونه: کودکان پنج در میانی که مصاحبه

می‌شوند. این یک نمونه‌گیری تصادفی است.

پ) برای بررسی pH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.  
پاسخ: جامعه: شامپوهای تولیدی کارخانه و نمونه: شامپوهای صد در میان آزمایش شده که یک نمونه‌گیری تصادفی است.

۴ برای تحقیقات و بررسی‌های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران

پاسخ: جامعه کسانی که مستعد و آماده کار کردن هستند در استان مازندران. برای نمونه تصادفی، از چندین ناحیه استان مازندران به تصادف افرادی را انتخاب می‌کنیم.

ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند؟

پاسخ: جامعه: مردانی که شامپو مصرف می‌کنند انتخاب به صورت تصادفی از این افراد (با دادن شماره و انتخاب تعدادی از آن شماره‌ها)

۵ می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی می‌کنند آمارگیری کنیم.

الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید.

پاسخ: دانش‌آموزان کلاس جامعه هستند.

ب) یک روش نمونه‌گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.

پاسخ: با توجه به لیست شماره‌گذاری شده دانش‌آموزان در دفتر کلاس اعداد را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می‌کنید؟

پاسخ: پرسش‌نامه

ت) اندازه (تعداد) این جامعه چقدر است؟

پاسخ: تعداد دانش‌آموزان کلاس

ث) اندازه نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب نبودن، روش نمونه‌گیری و نمونه خود را اصلاح کنید.

پاسخ: اندازه نمونه همان تعداد دانش‌آموزان انتخاب شده است و اگر تعداد مناسب نباشد نمونه و اندازه آن را مجدداً انتخاب می‌کنیم.

ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.

پاسخ: متغیر مورد مطالعه: مدت زمانی که صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی توسط دانش‌آموزان کلاس می‌شود، می‌باشد.

ج) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

پاسخ: کمی فاصله‌ای

۶ نوع هریک از متغیرهای زیر را مشخص کرده و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آنها را ذکر کنید.

الف) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل

پاسخ: کیفی اسمی

ب) درجه حرارت کلاس درس شما در روزهای سال

پاسخ: کمی فاصله‌ای (برحسب سلسیوس)

پ) گنجایش آب یک تانکر

پاسخ: کمی فاصله‌ای

ت) تعداد شکایات رسیده به یک پاسگاه پلیس

پاسخ: کمی فاصله‌ای

ث) درآمد دانشجویان شاغل کار

پاسخ: کمی نسبتی

ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت

پاسخ: کیفی اسمی

چ) سن دانشجویان شرکت‌کننده در یک دوره هنری

پاسخ: کمی نسبتی

۷ میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است.

نسبت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از ۳۵ میلیون ریال است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای پرداخت حقوق بالا در این شرکت باشد؟ چرا؟ کدام یک از معیارهای گرایش مرکزی برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است؟

پاسخ: خیر زیرا در این جدول داده دورافتاده (۱۰۰ و ۸) وجود دارد. میانه معیار گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است.

۸ نمرات درس فیزیک دانش‌آموزی در طول سال برابر است با:

۱۷	۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹
----	----	----	---	----	----

(الف) میانه و میانگین را برای نمرات این دانش‌آموز حساب کنید.

(ب) کدام یک از شاخص‌های فوق، بیانگر بهتری از وضع این دانش‌آموز در درس فیزیک است؟  
 (پ) اگر معلم درس فیزیک این دانش‌آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس بیشتر از ۱۸ شود، او در این امتحان چه نمره‌ای باید کسب کند؟  
 پاسخ: (الف) برای تعیین میانه داده‌ها را مرتب کرده (از کوچک به بزرگ) و چون تعداد آنها شش‌تاست پس میانگین داده سوم و چهارم میانه می‌باشد.

۷، ۱۷، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۱۹

$$\bar{x} = \frac{7+17+18+18+19+19}{6} = \frac{98}{6} = 16\frac{2}{3} \quad \text{میانه این داده‌ها ۱۸ است.}$$

(ب) به دلیل وجود داده دورافتاده (۷) میانه بیانگر بهتری از وضع دانش‌آموز است.  
 (پ) برای اینکه میانگین بیشتر از ۱۸ شود باید به جای ۷ عددی را پیدا کنیم که این امر حاصل شود. به جای آن  $x$  قرار می‌دهیم؛ بنابراین باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+17+18+18+19+19}{6} > 18 \Rightarrow x+91 > 6 \times 18$$

$$\Rightarrow x > 108 - 91 \Rightarrow x > 17$$

پس دانش‌آموز باید در آزمون مجدد نمره بالاتر از ۱۷ کسب کند.

۹ دو دسته داده زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می‌دهد.

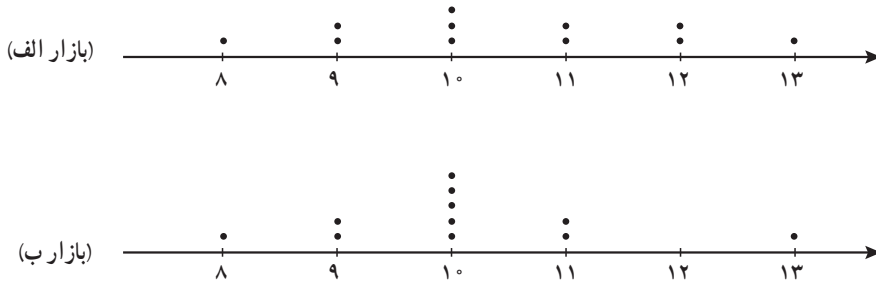
۸	۱۳	۹	۱۲	۱۰	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۱۱	۱۰	بازار الف
۱۰	۱۳	۸	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	بازار ب

(الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

(ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

(پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در «الف» همخوانی دارد؟

ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟  
 ث) اگر داده‌ها را در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغییرات می‌توانید تصمیم‌گیری کنید؟  
 پاسخ: الف) داده‌ها را روی دو محور اعداد مشخص می‌کنیم.



پراکندگی داده‌ها به نظر یکسان می‌آید هرچند (بازار ب) متمرکزتر کار کرده است.  
 ب) دامنه تغییرات اختلاف بین بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده می‌باشد بنابراین در هر دو بازار  $13 - 8 = 5$  دامنه تغییرات عدد ۵ است.

پ) بله در این حالت دامنه تغییرات پراکندگی را یکسان نشان می‌دهد.  
 ت) با تعیین دامنه میان چارکی دو بازار می‌توان به این سؤال بهتر پاسخ داد.  
 با مرتب کردن داده‌های دو بازار و تعیین چارک‌ها و دامنه میان چارکی داریم:

۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳ (بازار الف)

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $Q_1$   $Q$  میان  $Q_3$

$$IQR = 12 - 9 = 3$$

۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۳ (بازار ب)

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $Q_1$   $Q$  میان  $Q_3$

$$IQR = 11 - 9 = 2$$

با توجه به دو دامنه چارکی (بازار ب) پراکندگی کمتری دارد؛ بنابراین خرید از این بازار را ترجیح می‌دهیم.

ث) خیر فقط با داشتن دامنه تغییرات نمی‌توان تصمیم‌گیری درستی انجام داد.



## فصل ۵

### نمایش داده‌ها

## نگاه کلی به فصل

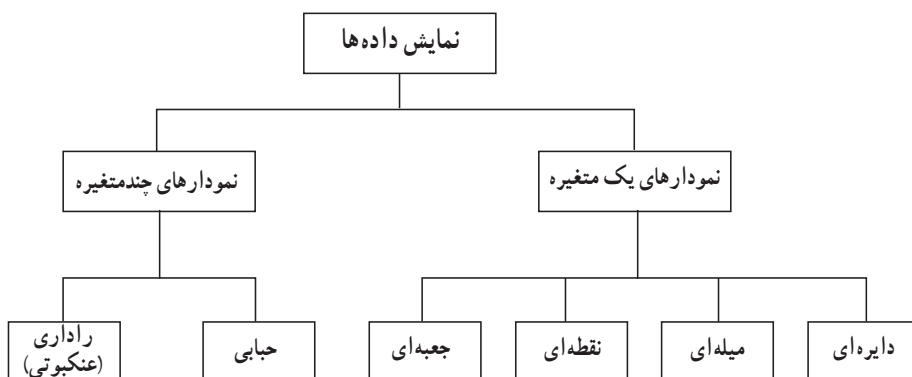
در فصل ۵ دانش‌آموزان با نمایش داده‌های گردآوری شده در یک آمارگیری و کاربرد نمودارها آشنا می‌شوند. هدف این فصل کار با نمودارهاست نه رسم نمودارها.

در درس اول: نمودارهای یک متغیره (نمودار میله‌ای، نمودار دایره‌ای) با مطرح شدن فعالیت و کار در کلاس برای دانش‌آموز یادآوری می‌شود.

همچنین با رسم مدل‌های مختلف از نمودارها و ایجاد چالش برای دانش‌آموزان، ایرادهای نمودارها را متذکر می‌شود. و بر این نکته تأکید می‌شود که «نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند.» در ادامه دانش‌آموزان با نمودار نقطه‌ای و نمودار جعبه‌ای آشنا شده و طریقه رسم آنها و کاربرد این دو نمودار برایشان مشخص می‌شود. همچنین در حاشیه‌ای از کتاب درباره نمودارهای میله‌ای افقی و در متن کتاب توضیحاتی داده می‌شود.

در درس دوم دانش‌آموزان با نمودارهای چند متغیره (نمودار حبابی، نمودار راداری (عنکبوتی)) آشنا می‌شوند و با ارائه مثال‌هایی، کاربرد این نمودارها آموزش داده می‌شود.

## نقشه مفهومی



## دانستنی‌هایی برای معلم

نمودار، ابزاری تصویری است که برای توصیف و نمایش داده‌های جمع‌آوری شده به کار برده می‌شود. در این فصل دو دسته نمودار (الف) نمودارهای یک متغیره (ب) نمودارهای چندمتغیره معرفی می‌شود.

### الف) نمودارهای یک متغیره

۱ نمودار میله‌ای: که بیشتر برای متغیرهای کمی با مقیاس فاصله‌ای و متغیرهای کیفی (با مقیاس اسمی و ترتیبی) به کار می‌رود.

۲ نمودار دایره‌ای: نمودارهایی که بیشتر برای متغیر کیفی که دارای حالات کمتری است استفاده می‌شود و هر قطعه از نمودار دایره‌ای با توجه به زاویه مرکزی که از رابطه

$$\alpha_i = \frac{360}{n} \times f_i$$

که در آن  $\alpha$  زاویه،  $n$  تعداد داده‌ها و  $f$  فراوانی هر داده می‌باشد به دست می‌آید، مشخص می‌شود. البته در برخی موارد درصد فراوانی نسبی داده‌ها به جای زاویه در نمودار نوشته می‌شود. توجه داشته باشیم بزرگی و کوچکی شعاع دایره تأثیری در نوع داده و فراوانی آن ندارد.

۳ نمودار نقطه‌ای: این نمودار که به صورت نقطه روی یک محور مشخص می‌شود کمک می‌کند که معیار گرایش به مرکز و پراکندگی را بهتر بررسی کنیم.

۴ نمودار جعبه‌ای: روشی مناسب برای نمایش دامنه‌ها (دامنه متغیر، دامنه میان چارکی) و میانه می‌باشد و پراکندگی داده‌ها از روی آن بهتر بررسی می‌شود.

### ب) نمودارهای چند متغیره

۱ نمودار حبابی: که به جای نقطه از دایره‌هایی با مساحت متناظر با ویژگی داده‌ها رسم می‌شود. هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی یک سه‌تایی مرتب است که به صورت  $(V_1, V_2, V_3)$  مشخص می‌شود که در آن  $V_1$ : موقعیت نقطه روی محور افقی  $V_2$ : موقعیت نقطه روی محور عمودی و  $V_3$ : اندازه نقطه (مساحت دایره) می‌باشد.

نمودار حبابی برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند.

**۲ نمودار راداری (عنکبوتی):** این نمودار از چندین خط (به عبارت صحیح‌تر، نیم‌خط) به شکل پره‌های چرخ یا دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه مرکز به یکدیگر اتصال دارند و بین آنها زاویه‌های یکسان وجود دارد. تعداد خطوط در واقع تعداد متغیرهای مورد بررسی را مشخص می‌کند و برای مقایسه چند مشاهده که متغیرهای یکسانی دارد مناسب است. یعنی اگر نمودار دویا چند مشاهده را به صورت «راداری» رسم کرده و روی هم بیندازیم می‌توانیم آنها را باهم مقایسه کنیم و پاسخ سؤال‌های زیر را به دست آوریم.

— کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟

— آیا داده‌های دورافتاده‌ای وجود دارد؟

— مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟

— مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

— محیط اکسل نمودار «راداری» قابل رسم و اطلاعات را کامل مشخص می‌کند.

## نمودارهای یک متغیره

### اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

۱. نمودار میله‌ای و کاربرد آن را درک کنند.
۲. مدل‌های مختلف نمودار میله‌ای را بشناسند و ایرادهای آنها را درک کنند.
۳. درک دقیق از نمودار دایره‌ای و کاربرد آن داشته باشند.
۴. تفاوت رسم نمودار دایره‌ای در حالت دویبعدی و سه‌بعدی را درک کنند.
۵. نمودار میله‌ای را درک کرده و مصداقی برای آن بیآورند.
۶. با نمودار جعبه‌ای آشنا شوند و طریقه رسم آن را درک کنند.
۷. کاربرد نمودار جعبه‌ای و تفسیر آن را بیان کنند.
۸. درک دقیقی از نمودار میله‌ای افقی داشته باشند.

### روش تدریس درس اول

در فعالیت صفحه ۱۱۲ با بیان یک مثال و به چالش کشیدن دانش‌آموزان، رسم نمودار میله‌ای و دایره‌ای که دانش‌آموزان قبلاً خوانده‌اند را به‌خاطر می‌آورند و کاربرد این دو نمودار را یادآوری می‌کند. کار در کلاس صفحه ۱۱۳ با این هدف که مطالب فصل قبل یادآوری شده و رسم نمودار نیز انجام شود، آورده شده است.

نمایش داده‌ها: در فعالیت صفحه ۱۱۴ دو نمودار دایره‌ای رسم شده است و با سؤالات هدفمند به بررسی آنها می‌پردازد که هرکدام از آنها چه اطلاعاتی در اختیارمان قرار می‌دهند و اینکه کدام واقعی‌تر هستند و سوء برداشت از آنها نمی‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۱۵ با بازی با نمودارها، سوء استفاده از نمودارها را برای گمراه کردن افراد به

نمایش می‌گذارد و این نمودارها که اطلاعات نادرست و نتیجه‌گیری غلط را باعث می‌شوند، معرفی می‌کند و درک دانش‌آموزان از به‌کارگیری نمودارها با این کار دقیق‌تر می‌شود. تمرین صفحه ۱۱۶، جهت تقویت یادگیری کاربرد نمودارها آورده شده است.

اهداف فعالیت صفحه ۱۱۷، آموزش رسم نمودارهای نقطه‌ای و نمودار جعبه‌ای و کاربرد این دو نمودار و تفسیر آنها می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۱۲۰ جهت تثبیت یادگیری رسم نمودار جعبه‌ای آورده شده است که گام به گام به دانش‌آموزان کمک می‌کند.

تمرین صفحه ۱۲۱ تکمیل‌کننده و دوره‌یادگیری مفاهیم ارائه شده در این درس می‌باشد.

## نمودارهای چندمتغیره

### درس دوم

### اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

۱ درک عمیق از دلیل استفاده از نمودار چندمتغیره را داشته باشند.

۲ با نمودار حبابی آشنا شده و طریقه رسم آن را درک کنند.

۳ نمودار راداری را درک کنند.

۴ طریقه رسم نمودار راداری را تشخیص داده و مصداقی برای آن بیاورند.

۵ کاربرد رسم نمودار راداری و نمودار حبابی را تشخیص دهند.

### روش تدریس درس دوم

در ابتدای درس دوم با یک مثال، سؤالی مطرح می‌شود که نیاز رسم نمودار چندمتغیره در دانش‌آموزان ایجاد می‌شود و یک نمودار را رسم می‌کنند.

در قسمت پراکنش نگاهت جمعیت در مقابل مساحت کشورها، نمودار حبابی را معرفی و چگونگی رسم آن را مطرح می‌کنند، که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند.

کار در کلاس صفحه ۱۲۴ تکمیل‌کننده درک و رسم نمودار حبابی است و تمرین صفحه ۱۲۴ درک کاربرد نمودار حبابی را تقویت و کامل می‌کند.

فعالیت صفحه ۱۲۵، با معرفی نمودار راداری و رسم آن در حالت‌های مختلف، دلیل استفاده از این نمودار را مطرح می‌کند و در ادامه، یک مثال در مورد نامزدهای نهایی دریافت جایزه توپ طلایی، انواع نمودار راداری رسم شده و با تفسیر آنها، درک بهتری از این نمودار ایجاد می‌شود. هدف کار در کلاس صفحه ۱۲۸، تثبیت چگونگی رسم نمودار راداری و کاربرد آن می‌باشد. تمرین صفحه ۱۲۸ دوره مفاهیم ارائه شده در این درس و تکمیل‌کننده درک مفاهیم است.

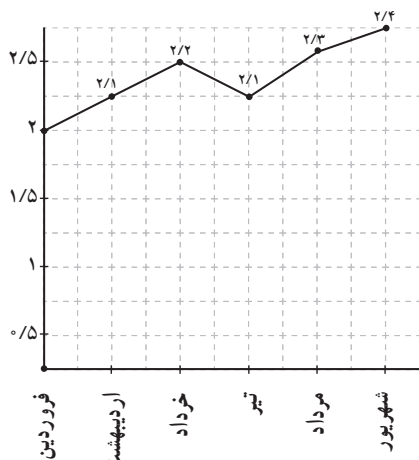
## حل تمرین‌ها

## تمرین صفحه ۱۱۶

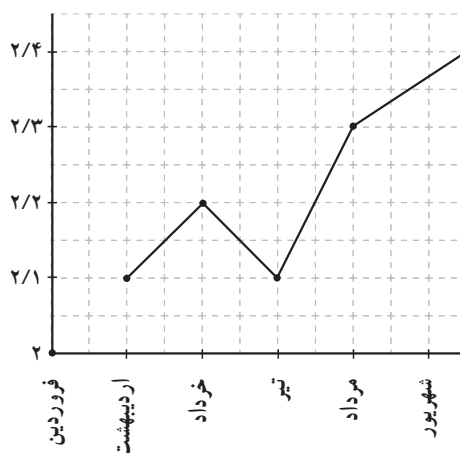
۱ سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است :

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

خریدار و فروشنده سهام این شرکت نمودارهای زیر را رسم کرده اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید.



از دید خریدار



از دید فروشنده

به نظر شما کدام یک منطقی تر است؟ آیا می توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟  
**حل :** اگر سودی که به دست می آید زیاد نباشد نمودار از دید خریدار و در غیر این صورت نمودار از دید فروشنده منطقی تر است.

برای رسم نمودار بهتر می توان واحد محورها را بزرگ تر در نظر گرفت.

۲ اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می کنیم نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله ای یا دایره ای برای مقایسه مناسب تر است؟

**حل :** در این صورت هر دو مناسب است اما نمودار دایره ای بهتر است.

۳ رسم نمودارهای میله ای و دایره ای برای داده های کمی مناسب تر هستند یا داده های کیفی؟

**پاسخ :** داده های کیفی



۴ چگونه برای داده‌های کمتی نمودار میله‌ای یا دایره‌ای رسم می‌کنید؟ پاسخ: در حالت کمتی تنها تفاوتی که با حالت کیفی دارد این است که در نمودار میله‌ای روی محور افقی داده کمتی قرار می‌گیرد و در نمودار دایره‌ای، درصد داده‌های کمتی قرار می‌گیرد.

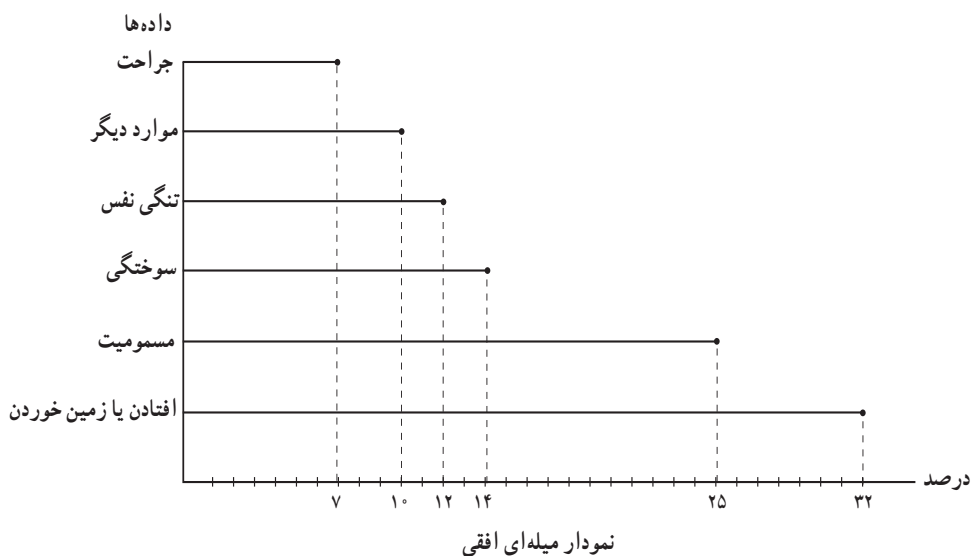
## تمرین صفحه ۱۲۱

۱ نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟

پاسخ: در صورت مقایسه دو دسته داده از نمودار میله‌ای با درصد استفاده کنیم بهتر است و اگر بررسی یک دسته داده باشد از نمودار میله‌ای یا فراوانی استفاده می‌شود.

۲ نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند، با این تفاوت که محورهای چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟

پاسخ: زمانی که اسم طبقات (متغیر کیفی) طولانی باشند نمودار میله‌ای افقی مفیدتر است و برای نمایش اسامی هر طبقه نیاز نیست به پهلوی نوشته شود. به عنوان نمونه مثال اول درس را در اینجا رسم می‌کنیم.



۳ سن بازیکنان تیم ملی یک کشور به شرح زیر است :

۲۷	۲۴	۲۶	۲۶	۲۹	۱۹	۳۱	۱۸	۲۳	۲۲	۲۵	۲۶	۲۷	۲۳	۲۹	۲۵	۲۵	۳۳	۳۱	۲۱	۲۶	۲۵
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را روی محور افقی نشان دهید.

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانگین را در این بررسی مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و چارک سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟

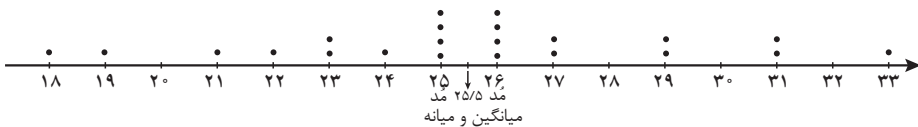
پاسخ: الف) ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳

با توجه به داده‌ها، مد دو عدد ۲۵ و ۲۶ با تکرار چهار بار می‌باشند و

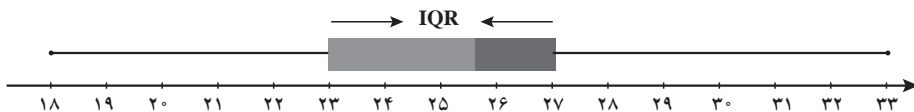
$$Q = \frac{25 + 26}{2} = 25.5$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 19 + \dots + 33}{23} = \frac{561}{23} = 24.39$$



ب)  $Q_1 = 23$  = چارک اول و  $Q_3 = 31$  = بزرگ‌ترین داده = کوچک‌ترین داده

$IQR = 27 - 23 = 4$  = دامنه میان چارکی  $Q_2 = 27$  = چارک سوم و  $Q = 25.5$  = میانه



نمودار جعبه‌ای

(پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین و تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانگین است برابر است و ۱۱ نفر در هر قسمت می‌باشند.

(ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه و تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانه می‌باشد برابر است. در این مثال میانه و میانگین باهم برابر هستند.

(ث) ۱۰ نفر از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرد.  
با توجه به اینکه بین چارک اول و سوم هر دسته داده همیشه ۵۰ درصد داده‌ها قرار می‌گیرد؛ بدون داشتن چارک‌ها می‌توانیم تعداد را مطرح کنیم.

$$۲۲ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۱۱ \quad , \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰$$

### تمرین صفحه ۱۲۴

- ۱ مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟  
(الف) شعاع دایره (ب) قطر دایره (پ) محیط دایره (ت) مساحت دایره  
پاسخ: مساحت دایره (قسمت یا گزینه ت)
- ۲ نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟  
(الف) یک متغیر (ب) دو متغیر (پ) سه متغیر (ت) محدودیتی ندارد  
پاسخ: گزینه ت یعنی محدودیتی ندارد

### تمرین صفحه ۱۲۸

- ۱ نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به طور هم زمان به کار می‌رود؟  
پاسخ: درست است.
- ۲ زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟  
پاسخ: اگر زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری یکسان باشد می‌توان از روی آن، تعداد متغیرها را تعیین کرد و اطلاعات دیگری نمی‌دهد.
- ۳ نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟  
پاسخ: نمودار راداری به ما می‌گوید: — کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟ — آیا داده دور افتاده‌ای وجود دارد؟ — مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟  
— مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

#### ۴ کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

پاسخ: از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت وضعیت بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

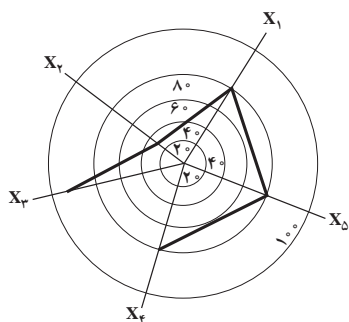
#### ۵ اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری $40^\circ$ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

پاسخ: چون زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری  $40^\circ$  درجه است و اگر بین تمام شعاع این زاویه رعایت شده باشد یکسان باشند در این صورت تعداد متغیرها، ۹ تا است زیرا:  $360 \div 40 = 9$

#### ۶ داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید.

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
$X_1$ عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
$X_2$ نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
$X_3$ نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
$X_4$ نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
$X_5$ شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

پاسخ: برای رسم نمودار، ابتدا پنج نیم خط که زاویه بین آنها  $72^\circ = \frac{360}{5}$  است را رسم کرده و هر نیم خط معرف  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  می‌باشد. با انتخاب یک کشور روی این نیم خط، تقسیم‌بندی با توجه به مقیاس را انجام داده مثلاً روی هر نیم خط فاصله‌های  $20^\circ$  و  $40^\circ$  و  $60^\circ$  و  $80^\circ$  و  $100^\circ$  را انتخاب کرده (دایره‌ای به شعاع‌های داده شده) و اعداد داده شده را روی آن مشخص می‌کنیم. برای نمونه، نمودار ایران را رسم می‌کنیم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم (در صورتی که دایره‌ها باعث اشتباه کشیدن شکل می‌شود می‌توان آنها را رسم نکرد).



به کمک اکسل، نمودار قابل تشخیص بهتری قابل رسم است.